

Matematika za statistike

Matej Filip

September 2025

Chapter 1

Verjetnost

1.1 Uvod

V vsakdanjem življenju se nenehno srečujemo z negotovostjo in variabilnostjo. Ali bo jutri deževalo? Kakšen bo dobiček podjetja v prihodnjem četrtnem letu? Kakšen je učinek novega zdravila pri zdravljenju določene bolezni? Težave, ki vključujejo negotovost, so v središču zanimanja verjetnostne teorije.

Verjetnost je matematični okvir, ki omogoča analizo naključnih pojavov. Služi kot temelj za statistiko, disciplino, ki omogoča sklepanje na podlagi podatkov. Statistika in verjetnost sta tesno povezani: statistika uporablja orodja verjetnosti, da bi naredila sklepne postopke, medtem ko se verjetnost ukvarja z modeliranjem naključnih poskusov.

V tem poglavju bomo uvedli osnovne pojme verjetnosti. Najprej bomo opisali vzorčne prostore in dogodke, nato pa formalizirali pojmovanje verjetnostnih mer. Kasneje bomo razvili osnovne metode za računanje verjetnosti, ki vključujejo kombinatorične principe, pogojno verjetnost in neodvisnost dogodkov. Na koncu bomo nakazali, kako se te ideje uporabljajo v statistiki in drugih področjih znanosti.

1.2 Vzorčni prostori

Pri obravnavi negotovih pojavov začnemo z natančno določitvijo vseh možnih izidov, ki jih lahko dobimo pri naključnem poskusu. Množico vseh možnih izidov imenujemo *vzorčni prostor* in jo običajno označimo s Ω .

Primer 1.2.1. Če vržemo kovanec, sta možna izida *grb* (G) ali *cifra* (C). Torej je vzorčni prostor $\Omega = \{G, C\}$.

Primer 1.2.2. Če vržemo standardno šeststransko kocko, so možni izidi cela števila od 1 do 6. Torej je vzorčni prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Primer 1.2.3. Če opazujemo čas (v minutah), ki ga potnik čaka na avtobus, je vzorčni prostor $\Omega = [0, \infty)$, ker so možne vse nenegativne realne vrednosti.

Vzorčni prostori so lahko:

- **diskretni**, če je vseh možnih izidov končno ali števno neskončno,
- **zvezni**, če so možni izidi predstavljeni s točkami na realni osi oziroma na uniji intervalov.

Dogodki

Definicija 1.2.4. Dogodek je poljubna podmnožica vzorčnega prostora Ω . Dogodek $A \subseteq \Omega$ se zgodi, če je dejanski izid naključnega poskusa element množice A .

Primer 1.2.5. Pri metu kocke je dogodek »pade sodo število« množica $A = \{2, 4, 6\}$. Če pade 4, rečemo, da je dogodek nastopil.

Operacije na dogodkih

Ker so dogodki množice, lahko z njimi izvajamo običajne množične operacije:

- **Unija:** $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ali } \omega \in B\}$. To je dogodek, da se zgodi A ali B (ali oba).
- **Presek:** $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ in } \omega \in B\}$. To je dogodek, da se zgodita A in B hkrati.
- **Komplement:** $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$. To je dogodek, da se A ne zgodi.
- **Razlika:** $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ in } \omega \notin B\}$. To je dogodek, da se zgodi A , a ne B .

Primer 1.2.6. Naj bo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pri metu kocke. Če je $A = \{2, 4, 6\}$ (soda števila) in $B = \{1, 2, 3\}$ (števila ≤ 3), potem:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad A^c = \{1, 3, 5\}, \quad A \setminus B = \{4, 6\}.$$

Posebni dogodki

- Gotov dogodek: $A = \Omega$, ki se vedno zgodi.
- Nemogoč dogodek: $A = \emptyset$, ki se nikoli ne zgodi.
- Elementarni dogodek: $A = \{\omega\}$ vsebuje natanko en izid.

Disjunktni dogodki

Dogodka A in B sta *nezdružljiva* (disjunktna), če je $A \cap B = \emptyset$. Takrat se ne moreta zgoditi hkrati.

Zakoni za množice

Operacije z dogodki zadoščajo naslednjim zakonitostim (za vse dogodke A, B, C):

- **Komutativnost:**

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

- **Asociativnost:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Distributivnost:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

De Morganova zakona

Za vsaka dogodka A in B veljata pravili:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Primer 1.2.7. Če A pomeni »pade soda številka«, B pa »pade število večje od 4«, potem $A \cup B$ pomeni »pade soda številka ali številka večja od 4«. Komplement dogodka je »pade liha številka, ki ni večja od 4«, kar je množica $\{1, 3\}$. Po De Morganovem zakonu je to enako kot $A^c \cap B^c$.

1.3 Verjetnost

Ko imamo definiran vzorčni prostor Ω in dogodke kot njegove podmnožice, želimo tem dogodkom prirediti številske vrednosti, ki odražajo njihovo verjetnost. To formaliziramo z uvedbo *verjetnostne preslikave* (ali na kratko verjetnosti).

Definicija 1.3.1. *Verjetnost* je preslikava

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

kjer je $\mathcal{F}$ družina podmnožic vzorčnega prostora Ω , za katero veljajo naslednji aksiomi:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. Za vsak dogodek $A \in \mathcal{F}$ velja $0 \leq P(A) \leq 1$,
3. Če sta A in B nezdružljiva dogodka ($A \cap B = \emptyset$), potem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Izpeljane lastnosti verjetnosti

Iz zgornjih treh aksiomov lahko izpeljemo več uporabnih zakonitosti.

1. Verjetnost nemogočega dogodka. Ker velja $P(\Omega) = 1$ in $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, dobimo

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset),$$

od tod $P(\emptyset) = 0$.

2. Komplement dogodka. Za vsak dogodek A velja $\Omega = A \cup A^c$ in $A \cap A^c = \emptyset$. Po aksiomu aditivnosti:

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c).$$

Ker je $P(\Omega) = 1$, dobimo

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

3. Monotoničnost. Če je $A \subseteq B$, potem velja $B = A \cup (B \setminus A)$ in $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Torej

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A),$$

saj je $P(B \setminus A) \geq 0$.

4. Formula za unijo dveh dogodkov. Za poljubna A, B velja

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

pri čemer so množice na desni paroma disjunktne. Torej

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B).$$

Ker velja $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ in $P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$, sledi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Te lastnosti se uporabljajo pri praktičnem računanju verjetnosti.

Primer 1.3.2 (Klasična definicija). Če je vzorčni prostor končen in so vsi izidi enako verjetni, potem je verjetnost dogodka A enaka

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

1.4 Računanje verjetnosti: kombinatorične metode

Pri obravnavi diskretnih vzorčnih prostorov, kjer imajo vsi izidi enako verjetnost, lahko verjetnost dogodka A izračunamo kot

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zato je pogosto najpomembnejša naloga prešteti število elementov v Ω in v A . V ta namen uporabljamo osnovna kombinatorična pravila.

1.4.1 Načelo množenja

Če lahko neko opravilo izvedemo v n_1 različnih načinih, drugo v n_2 načinih, in tako naprej do n_k , potem lahko celoten postopek izvedemo na

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

načinov.

Primer 1.4.1. Če lahko za geslo izberemo eno črko (25 možnosti) in eno številko (10 možnosti), potem je vseh gesel $25 \cdot 10 = 250$.

1.4.2 Permutacije in variacije

Permutacija je urejen razpored vseh n elementov. Število vseh permutacij množice n elementov je

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Primer 1.4.2. Koliko različnih načinov je, da razporedimo 5 knjig na polico? Odgovor: $5! = 120$.

Če izmed n elementov izberemo k in jih uredimo v vrstnem redu, govorimo o *variacijah* brez ponavljanja:

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Primer 1.4.3. Izmed 10 kandidatov želimo izbrati predsednika, podpredsednika in tajnika. Število možnosti je

$$\frac{10!}{7!} = 720.$$

1.4.3 Kombinacije

Če izmed n elementov izberemo k , pri čemer vrstni red ni pomemben, govorimo o kombinacijah. Njihovo število je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Primer 1.4.4. Izmed 10 kandidatov želimo izbrati 3 člane odbora, brez razlikovanja po funkcijah. Število možnosti je

$$\binom{10}{3} = 120.$$

1.4.4 Binomski koeficienti in binomska formula

Binomski koeficient $\binom{n}{k}$ ima naravno interpretacijo: število podmnožic z k elementi v n -članski množici.

Izrek 1.4.5 (Binomska formula). *Za vsako naravno število n velja*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Dokaz. Razvoj $(x + y)^n$ predstavlja produkt n faktorjev, v vsakem faktorju lahko izberemo x ali y . Če izberemo natanko k -krat x in $(n - k)$ -krat y , dobimo člen $x^k y^{n-k}$. Število vseh takih izbir je $\binom{n}{k}$. Seštevke vseh takih členov da formulo. $\square$

Primer 1.4.6. Za $n = 3$ imamo

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

kar ustreza $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{3}{3} = 1$.

Primer 1.4.7 (Hipergeometrijska verjetnost). Naj bo N velikost populacije, od tega je M elementov posebnega tipa (npr. »neustreznih«) in $N - M$ elementov drugega tipa (npr. »ustreznih«). Če naključno vzamemo vzorec velikosti n brez vračanja, je verjetnost, da bo v vzorcu natanko k elementov posebnega tipa, enaka

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Konkretni primer hipergeometrijske verjetnosti: V pošiljki $N = 100$ artiklov je $M = 10$ neustreznih in 90 ustreznih. Če vzamemo vzorec $n = 5$ artiklov brez vračanja, je verjetnost, da bo natanko $k = 2$ neustrezna, enaka

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{90}{3}}{\binom{100}{5}}.$$

Tukaj števec predstavlja število načinov, kako izmed 10 neustreznih artiklov izberemo 2, hkrati pa izmed 90 ustreznih še 3, imenovalec pa število vseh možnih vzorcev velikosti 5 izmed 100 artiklov.

1.4.5 Multinomski koeficienti in formula (to bomo kasneje)

Število načinov, kako lahko n objektov razdelimo v m razredov, tako da jih je v i -tem razredu natanko k_i ($i = 1, \dots, m$ in $k_1 + \dots + k_m = n$), je dano z multinomskim koeficientom:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Izrek 1.4.8 (Multinomska formula). Za vsako naravno število n velja

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Primer 1.4.9. Za $n = 3$, $m = 3$ imamo

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz.$$

Primer 1.4.10 (Razdelitev v tri skupine). Naj bo $n = 8$ študentov, ki jih želimo razdeliti v tri skupine: prvi skupini dodelimo $k_1 = 3$ študente, drugi $k_2 = 3$, in tretji $k_3 = 2$. Število vseh možnih razporeditev je

$$\binom{8}{3, 3, 2} = \frac{8!}{3! 3! 2!} = 560.$$

Primer 1.4.11 (Deljenje kart igralcem). Naj imamo 12 kart in 4 igralce. Vsak igralec dobi 3 karte. Število različnih razdelitev je

$$\binom{12}{3, 3, 3, 3} = \frac{12!}{3! 3! 3! 3!} = 369600.$$

Primer 1.4.12 (Barvne kroglice v škatle). Naj imamo 15 kroglic: 6 rdečih, 5 modrih in 4 zelene. Število različnih načinov razvrstitve v tri razrede je

$$\binom{15}{6, 5, 4} = \frac{15!}{6! 5! 4!} = 12612600.$$

1.5 Pogojna verjetnost

Včasih nas zanima verjetnost dogodka pod pogojem, da vemo, da se je zgodil drug dogodek.

Definicija 1.5.1. Naj bosta A in B dogodka v vzorčnem prostoru Ω . *Pogojna verjetnost* dogodka B glede na dogodek A je definirana kot

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{če je } P(A) > 0.$$

Primeri iz vsakdanjega življenja

Primer 1.5.2 (Medicinski test). Če vemo, da je oseba bolna (A), nas zanima verjetnost, da bo test pozitiven (B). Pogojna verjetnost je $P(B|A)$ in jo imenujemo *občutljivost testa*.

Primer 1.5.3 (Prometni zastoj). Verjetnost, da bomo zamudili na sestanek (B), je večja, če vemo, da dežuje (A). Pogojna verjetnost $P(B|A)$ odraža vpliv vremena na zamude.

Primer 1.5.4 (Športna napoved). Verjetnost, da bo ekipa zmagala (B), se spremeni, če vemo, da igra na domačem igrišču (A).

Zakon množenja verjetnosti

Iz definicije sledi pomembna zveza:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B).$$

Ta zakon omogoča računanje presekov verjetnosti preko pogojnih verjetnosti.

Primer 1.5.5. V vreči so tri rdeče in ena modra kroglica. Izberemo dve kroglici brez vračanja. Kakšna je verjetnost, da sta obe rdeči? Naj bosta R_1 in R_2 dogodka, da je na prvem oziroma drugem žrebu izžrebana rdeča kroglica. Po pravilu množenja velja

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) P(R_2 | R_1).$$

Očitno je

$$P(R_1) = \frac{3}{4},$$

in če je bila pri prvem žrebu odstranjena ena rdeča kroglica, ostaneta dve rdeči in ena modra. Zato

$$P(R_2 | R_1) = \frac{2}{3}.$$

Sledi

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Hitro kombinatorično preverjanje da enak rezultat:

$$P(\text{oba rdeča}) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Opazimo, da dogodka R_1 in R_2 nista neodvisna; zato je pogojni korak bistven.

Zakon popolne verjetnosti

Naj bo $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ popoln sistem disjunktih dogodkov (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ in $A_1 \cup \dots \cup A_k = \Omega$). Za vsak dogodek B velja

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(B|A_i)P(A_i).$$

Primer 1.5.6. V navezavi na Primer 1.5.5: kakšna je verjetnost, da je na drugem žrebu izžrebana rdeča kroglica? Pravilni rezultat dobimo z zakonom totalne verjetnosti:

$$P(R_2) = P(R_2 | R_1)P(R_1) + P(R_2 | B_1)P(B_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

kjer B_1 označuje dogodek, da je na prvem žrebu izžrebana modra kroglica.

Bayesovo pravilo

Bayesovo pravilo:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^k P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Primer 1.5.7. Poligrafski testi (t. i. detektorji laži) se pogosto rutinsko izvajajo pri zaposlenih ali kandidatih za zaposlitev na občutljivih delovnih mestih. Naj bo $+$ dogodek, da je poligrafski rezultat pozitiven, kar pomeni, da preiskovanec laže; naj bo R dogodek, da preiskovanec govori resnico; in L dogodek, da preiskovanec laže.

Po raziskavah o zanesljivosti poligrafov (Gastwirth, 1987) velja:

$$P(+ | L) = 0.88,$$

od koder sledi, da je

$$P(- | L) = 0.12.$$

Prav tako velja

$$P(- | R) = 0.86,$$

od koder sledi

$$P(+ | R) = 0.14.$$

Z besedami: če oseba laže, je verjetnost, da bo to zaznal poligraf, enaka 0.88, medtem ko, če oseba govori resnico, poligraf z verjetnostjo 0.86 pokaže, da govori resnico.

Predpostavimo sedaj, da se poligrafski testi rutinsko uporabljajo za varnostno preverjanje zaposlenih, in da ima pri določenem vprašanju velika večina preiskovancev nobenega razloga za laganje, tako da

$$P(R) = 0.99, \quad P(L) = 0.01.$$

Če preiskovanec pri testu dobi pozitiven rezultat, nas zanima, kakšna je verjetnost, da je poligraf v resnici napačen in da oseba dejansko govori resnico. To verjetnost lahko ocenimo z Bayesovim pravilom:

$$P(R \mid +) = \frac{P(+ \mid R)P(R)}{P(+ \mid R)P(R) + P(+ \mid L)P(L)} = \frac{(0.14)(0.99)}{(0.14)(0.99) + (0.88)(0.01)} = 0.94.$$

Torej bo pri preverjanju te populacije, v kateri je večina ljudi nedolžnih, kar 94% pozitivnih rezultatov poligrafa napačnih. Večina tistih, ki bodo zaradi poligrafskega rezultata osumljeni, bo v resnici nedolžnih. Ta primer ponazarja eno izmed nevarnosti uporabe postopkov množičnega preverjanja v velikih populacijah.

Sklep

Pogojna verjetnost, zakon popolne verjetnosti in Bayesovo pravilo so ključni pojmi, ki omogočajo sklepanje v negotovih situacijah, od medicinske diagnostike do zanesljivosti naprav in strojnega učenja.

1.6 Neodvisnost

Pojem neodvisnosti opisuje situacije, ko pojav enega dogodka nima nobenega vpliva na verjetnost drugega.

Definicija 1.6.1. Dogodka A in B sta *neodvisna*, če velja

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ekivalentno lahko rečemo, da sta A in B neodvisna, če

$$P(B \mid A) = P(B) \quad \text{ali} \quad P(A \mid B) = P(A).$$

Primer 1.6.2. Iz paketa kart naključno izberemo eno karto. Naj bo A dogodek, da je karta as, in D dogodek, da je karta karo.

Če vemo, da je karta as, nam to ne pove ničesar o njenem znaku. Formalno lahko preverimo, da sta dogodka neodvisna.

Velja

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(D) = \frac{1}{4}.$$

Poleg tega je $A \cap D$ dogodek, da je izbrana karta karo as, zato

$$P(A \cap D) = \frac{1}{52}.$$

Ker pa je

$$P(A)P(D) = \left(\frac{1}{13}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{52},$$

sta dogodka A in D dejansko neodvisna.

Neodvisnost več dogodkov

Dogodki $A_1, A_2, \dots, A_n$ so *medsebojno neodvisni*, če za vsako podmnožico $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ indeksov velja

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Primer 1.6.3 (Trije meti kovanca). Pri treh zaporednih metih kovanca so dogodki »prvi met je grb«, »drugi met je grb« in »tretji met je grb« medsebojno neodvisni, saj je verjetnost preseka enaka produktu posameznih verjetnosti.

Opozorilo: Neodvisnost $\neq$ disjunktnost

- Če sta A in B *disjunktna* ($A \cap B = \emptyset$), potem velja $P(A \cap B) = 0$. - Če sta hkrati neodvisna, bi morali imeti $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0$. To je možno samo, če je $P(A) = 0$ ali $P(B) = 0$.

Primer 1.6.4. Pri metu kocke naj bo $A = \{1\}$ in $B = \{2\}$. Dogodka sta disjunktna, nista pa neodvisna, ker

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B) = \frac{1}{36}.$$

Lastnosti neodvisnosti

Če sta A in B neodvisna, potem veljajo:

- A in B^c sta neodvisna,
- A^c in B sta neodvisna,
- A^c in B^c sta neodvisna.

Oris. Če je $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, potem velja

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Podobno se pokaže za ostale primere. □

Sklep

Neodvisnost je ključna lastnost v verjetnostni teoriji in statistiki. Omogoča enostavnejše računanje verjetnosti in je osnova za mnoge modele, npr. pri anketah (neodvisni odgovori), strojnem učenju in teoriji informacij.

1.7 Zaključne opombe

V tem poglavju smo spoznali osnovne pojme verjetnosti: vzorčne prostore, dogodke, verjetnostne mere, kombinatorične metode, pogojno verjetnost in neodvisnost. Ti koncepti tvorijo temelj za celotno teorijo verjetnosti in njihovo poznavanje je ključno za razumevanje statistike.

Statistika gradi na verjetnosti: iz opazovanih podatkov sklepamo o populacijah in procesih, ki so inherentno naključni. Brez osnovnega znanja verjetnosti bi bilo nemogoče oblikovati zanesljive metode sklepanja, ocenjevanja in testiranja hipotez.

V naslednjih poglavjih bomo te ideje razširili na obravnavo slučajnih spremenljivk in njihovih porazdelitev, kar bo omogočilo formalno obravnavo podatkov v kvantitativnih znanstvenih disciplinah.

1.8 Naloge

1. Vržemo dve kocki. Določite verjetnost, da je vsota pik enaka 7.
2. Izmed 20 študentov jih 12 zna programirati v Pythonu. Naključno izberemo 3. Kakšna je verjetnost, da vsi znajo programirati?
3. V podjetju je 40 % zaposlenih žensk. Če naključno izberemo 5 oseb, kakšna je verjetnost, da bodo natanko 3 ženske?
4. V škatli je 6 rdečih in 4 modre kroglice. Izberemo 2. Določite verjetnost, da sta obe rdeči.
5. Dve karti izvlečemo zaporedoma brez vračanja iz kompleta 52 kart. Določite verjetnost, da sta obe asi.
6. V podjetju testirajo nov izdelek. Pretekle izkušnje kažejo, da je 95 % izdelkov uspešnih, če so pri testiranju prejeli dobre ocene, 60 % uspešnih, če so prejeli srednje ocene, in 10 % uspešnih, če so prejeli slabe ocene. Če vemo, da je izdelek pri testiranju prejel dobre ocene, kakšna je verjetnost, da bo uspešen na trgu?

7. Dokazujte, da za poljubna dogodka A in B velja

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

8. V podjetju se 1 % izdelkov izkaže za neustrezne. Če pregledamo 100 izdelkov, ocenite verjetnost, da bo natanko en neustrezen.

Chapter 2

Slučajne spremenljivke

2.1 Diskretne slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je v bistvu naključno število. Za motivacijo si pogledajmo primer.

Kovanec vržemo trikrat in opazujemo zaporedje grbov (h) in cifer (t). Vzorčni prostor je

$$\Omega = \{hhh, hht, htt, hth, ttt, tth, thh, tht\}.$$

Primeri slučajnih spremenljivk, definiranih na Ω , so:

1. skupno število grbov,
2. skupno število cifer,
3. število grbov minus število cifer.

Vsaka od teh funkcij določa pravilo, ki vsakemu izidu $\omega \in \Omega$ priredi realno število. Ker je izid v Ω naključen, je tudi prirejeno število naključno.

Definicija 2.1.1. Na splošno je slučajna spremenljivka preslikava iz Ω v realna števila:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Običajno slučajne spremenljivke označujemo z velikimi črkami iz konca abecede (npr. X, Y, Z).

Primer 2.1.2. Naj bo X skupno število grbov v opisanem poskusu (trikratni met kovanca). Takrat je X slučajna spremenljivka, ki lahko zavzame vrednosti 0, 1, 2, 3.

Definicija 2.1.3. *Diskretna slučajna spremenljivka* je slučajna spremenljivka, ki lahko zavzame le končno ali kvečjemu števno neskončno mnogo vrednosti.

Primer 2.1.4. Prejšnja slučajna spremenljivka X (skupno število grbov v treh metih) je diskretna, saj so možne vrednosti le $0, 1, 2, 3$.

Za primer slučajne spremenljivke s števno neskončno mnogo možnimi vrednostmi si pogledajmo poskus: kovanec mečemo, dokler ne pade prvo grb, in definiramo

$$Y = \text{število metov do prve grbe.}$$

Možne vrednosti so $1, 2, 3, \dots$

Na splošno pravimo, da je množica števno neskončna, če jo lahko postavimo v bijektivno korespondenco z množico celih števil.

Primer 2.1.5. Če je kovanec pošten, ima vsak izid iz Ω zgoraj verjetnost $\frac{1}{8}$. Tako lahko izračunamo:

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 2) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Na splošno verjetnostna preslikava na vzorčnem prostoru določa verjetnosti različnih vrednosti slučajne spremenljivke. Če so možne vrednosti $x_1, x_2, \dots$, potem obstaja funkcija p , da velja

$$p(x_i) = P(X = x_i), \quad \sum_i p(x_i) = 1.$$

Funkcija p se imenuje *gostota* (tudi *frekvenčna funkcija*) slučajne spremenljivke X .

Definicija 2.1.6. *Porazdelitvena funkcija* (cdf) slučajne spremenljivke X je definirana kot

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Porazdelitvena funkcija je naraščajoča in zadošča pogojema

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Primer 2.1.7. Za slučajno spremenljivko X (število grbov v treh metih poštenega kovanca) je $p(x)$ podan z

$$p(0) = \frac{1}{8}, \quad p(1) = \frac{3}{8}, \quad p(2) = \frac{3}{8}, \quad p(3) = \frac{1}{8}.$$

Porazdelitvena funkcija $F(x)$ ima skoke v točkah $x = 0, 1, 2, 3$, višina skoka pri $x = i$ pa je enaka $p(i)$.

Neodvisne slučajne spremenljivke

Tako kot govorimo o neodvisnosti dogodkov, lahko definiramo tudi neodvisnost slučajnih spremenljivk.

Definicija 2.1.8. Slučajni spremenljivki X in Y sta *neodvisni*, če velja

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j) \quad \text{za vse } i, j.$$

Primer 2.1.9 (Dva meta kovanca). Naj bo $X = 1$, če je pri prvem metu grb (in 0 sicer), ter $Y = 1$, če je pri drugem metu grb (in 0 sicer). Potem je

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

in podobno za vse ostale kombinacije. Torej sta X in Y neodvisni.

Primer 2.1.10 (Met kovanca trikrat). Naj bo $X =$ »število grbov v prvih dveh metih«, $Y =$ »število grbov v zadnjih dveh metih«, pri treh metih poštenega kovanca.

Možne vrednosti so $X \in \{0, 1, 2\}$ in $Y \in \{0, 1, 2\}$. Skupno vzorčni prostor vsebuje $2^3 = 8$ enako verjetnih izidov.

Izračunajmo nekaj verjetnosti:

$$P(X = 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad P(Y = 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Toda

$$P(X = 2, Y = 2) = P(\text{prvi dve grb in zadnji dve grb}) = P(\text{hhh}) = \frac{1}{8}.$$

Če bi bila X in Y neodvisni, bi morale veljati

$$P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2) P(Y = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ker pa v resnici velja $P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{16}$, spremenljivki X in Y nista neodvisni.

2.1.1 Bernoullijeve slučajne spremenljivke

Definicija 2.1.11. *Bernoullijev poskus* je poskus, ki ima samo dva možna izida: *uspeh* in *neuspeh*.

Primer 2.1.12. Met kovanca: uspeh = pade grb, neuspeh = pade cifra.
Test bolezn: uspeh = pozitiven test, neuspeh = negativen test.

Definicija 2.1.13. *Bernoullijeva slučajna spremenljivka* X je definirana kot

$$X = \begin{cases} 1, & \text{če nastopi uspeh,} \\ 0, & \text{če nastopi neuspeh.} \end{cases}$$

Če je $p = P(X = 1)$ verjetnost uspeha, potem velja

$$P(X = 0) = 1 - p, \quad P(X = 1) = p.$$

Primer 2.1.14. Če je verjetnost, da bo test pravilno zaznal bolezen $p = 0.98$, potem je Bernoullijeva spremenljivka $X = 1$, če je test pozitiven, in $X = 0$, če je negativen. Tedaj je $P(X = 1) = 0.98$, $P(X = 0) = 0.02$.

2.1.2 Binomske slučajne spremenljivke

Zaporedje n neodvisnih Bernoullijevih poskusov z verjetnostjo uspeha p pripelje do števila uspehov X v teh n poskusih.

Definicija 2.1.15. *Binomska slučajna spremenljivka* X s parametri n in p ima verjetnost

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Primer 2.1.16 (Spol otrok). Verjetnost, da se rodi fant, je približno $p = 0.515$. V družini s petimi otroki naj bo X število fantov. Potem

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} 0.515^3 0.485^2 \approx 0.321,$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.515^5 \approx 0.036.$$

Povezava z Bernoullijevimi spremenljivkami. Naključno spremenljivko z binomsko porazdelitvijo lahko izrazimo kot vsoto n neodvisnih Bernoullijevih spremenljivk. Če označimo $X_i \sim \text{Bern}(p)$, $i = 1, \dots, n$, neodvisne in vsaka predstavlja izid enega poskusa, potem velja

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p).$$

Ta povezava je ključna, saj omogoča razumevanje binomske porazdelitve kot seštevka preprostih poskusov tipa »uspeh/neuspeh«.

2.1.3 Geometrijska porazdelitev

Definicija 2.1.17. Naj bo poskus sestavljen iz neodvisnih Bernoullijevih poskusov, pri čemer ima vsak poskus le dva možna izida in verjetnost uspeha p je enaka v vseh poskusih. Naključno spremenljivko X , ki je enaka številu poskusov do prvega uspešnega poskusa, imenujemo *geometrijska naključna spremenljivka*.

Definicija 2.1.18. Gostota geometrijske spremenljivke je

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \dots$$

Primer 2.1.19. Pri digitalnem prenosu signala je verjetnost, da je signal slab, $p = 0.1$. Naj bo X število prenosov do prvega slabega signala.

$$P(X = 1) = 0.1, \quad P(X = 10) = 0.99^9 \cdot 0.1 \approx 0.0387, \quad P(X = 20) = 0.99^{19} \cdot 0.1 \approx 0.0135.$$

Pričakovana vrednost diskretne slučajne spremenljivke

Definicija 2.1.20. Če je X diskretna slučajna spremenljivka z gostoto $p(x)$, je njena pričakovana vrednost, označena z $E(X)$, definirana kot

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i),$$

pod pogojem, da velja

$$\sum_i |x_i| p(x_i) < \infty.$$

Vsote bomo podrobneje študirali v prihodnjem poglavju. Prav tako bomo spoznali še nakaj drugih zelo pomembnih diskretnih slučajnih spremenljivk, kot so negativna binomska, hipergeometrijska in Poissonova.

2.2 Zvezne slučajne spremenljivke

Pri zveznih slučajnih spremenljivkah vlogo frekvenčne funkcije prevzame *gostota verjetnosti* (ali na kratko *gostota*) $f(x)$, za katero velja:

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Če je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto f , potem za poljubna $a < b$:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Porazdelitvena funkcija. Za zvezno slučajno spremenljivko X definiramo porazdelitveno funkcijo

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Če je f zvezna v x , potem velja $f(x) = F'(x)$, kar bomo še dokazali.

Enakomerna slučajna spremenljivka. Enakomerna slučajna spremenljivka na intervalu $[0, 1]$ ima gostoto

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

in porazdelitveno funkcijo

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Normalna porazdelitvena funkcija Slučajna spremenljivka X ima *normalno porazdelitev* s parametri μ in σ^2 , če je njena gostota verjetnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

kjer je $\mu \in \mathbb{R}$ sredina (ali povprečje ali pričakovana vrednost) in $\sigma^2 > 0$ varianca (disperzija).

V prihodnjih poglavjih bomo spoznali še nekatere druge zvezne slučajne spremenljivke.

Kvantil, mediana in kvartili.

Definicija 2.2.1. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo F . Za $0 < p < 1$ imenujemo p -ti kvantil število x_p , za katero velja

$$P(X \leq x_p) = F(x_p) = p.$$

Če je F strogo naraščajoča, je kvantil enolično določen kot

$$x_p = F^{-1}(p).$$

Posebni primeri kvantilov:

$x_{0.5}$ je *mediana*, $x_{0.25}$ je *spodnji kvartil*, $x_{0.75}$ je *zgornji kvartil*.

Primer 2.2.2. Naj bo porazdelitvena funkcija

$$F(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Inverzna funkcija je $F^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Sledi:

$$\text{mediana} = x_{0.5} = F^{-1}(0.5) = \sqrt{0.5} \approx 0.707,$$

$$\text{spodnji kvartil} = x_{0.25} = F^{-1}(0.25) = \sqrt{0.25} = 0.50,$$

$$\text{zgornji kvartil} = x_{0.75} = F^{-1}(0.75) = \sqrt{0.75} \approx 0.866.$$

Pričakovana vrednost zvezne slučajne spremenljivke

Definicija 2.2.3. Če je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto $f(x)$, potem je njena pričakovana vrednost

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx,$$

pod pogojem, da velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx < \infty.$$

Integrale bomo podrobneje študirali v prihodnjih poglavjih.

Varianca slučajne spremenljivke

Definicija 2.2.4. Če je X slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo $E(X)$, potem je varianca spremenljivke X definirana kot

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2],$$

pod pogojem, da pričakovana vrednost obstaja. Standardni odklon spremenljivke X je kvadratni koren variance.

Chapter 3

Zaporedja in vrste

Zaporedja

Definicija 3.0.1. *Zaporedje realnih števil* je predpis, ki vsakemu naravnemu številu $n \in \mathbb{N}$ priredi realno število a_n . Realno število a_n imenujemo n -ti člen zaporedja, n pa *indeks* člena a_n . Zaporedje zapišemo kot $a_1, a_2, a_3, \dots$ ali krajše $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oziroma $\{a_n\}$.

Opomba 3.0.2. Zaporedje lahko določimo eksplicitno (s predpisom za splošni člen a_n) ali rekurzivno (s predpisom, ki izrazi a_n z nekaj predhodnimi členi $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots$). Člene zaporedja je pogosto nazorno predstaviti kot točke (n, a_n) v ravnini ali kot točke a_n na številski premici.

Primer 3.0.3.

- Aritmetično zaporedje: $a_{n+1} = a_n + d$ in $a_n = a_1 + (n-1)d$.
- Geometrijsko zaporedje: $a_{n+1} = q a_n$ in $a_n = a_1 q^{n-1}$.
- Fibonacci: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Monotonost in omejenost

Definicija 3.0.4. Zaporedje $\{a_n\}$ je *naraščajoče*, če $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in *strogo naraščajoče*, če $a_{n+1} > a_n$. Podobno je *padajoče*, če $a_{n+1} \leq a_n$, in *strogo padajoče*, če $a_{n+1} < a_n$. Zaporedje je *monotono*, če je naraščajoče ali padajoče.

Definicija 3.0.5. Zaporedje $\{a_n\}$ je *navzgor omejeno*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$ tako, da $a_n \leq M$ za vse n ; število M je (ena) *zgornja meja*. *Navzdol omejeno*

je, če obstaja $m \in \mathbb{R}$ tako, da $a_n \geq m$ za vse n ; m je (ena) *spodnja meja*. Zaporedje je *omejeno*, če je hkrati navzgor in navzdol omejeno.

Definicija 3.0.6. *Natančna zgornja meja* (supremum) zaporedja je $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, najmanjša med vsemi njegovimi zgornjimi mejami. *Natančna spodnja meja* (infimum) je $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, največja med vsemi spodnjimi mejami.

Primer 3.0.7. Za $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ je $\inf_n a_n = 1$, zaporedje je strogo padajoče in $\sup_n a_n = a_1 = 2$.

Alternirajoča zaporedja

Definicija 3.0.8. Zaporedje je *alternirajoče*, če se predznak členov izmenjuje, tj. $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak n .

Stekališča in limita

Definicija 3.0.9 (Stekališče). Število $A \in \mathbb{R}$ je *stekališče* zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ leži v $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja.

Definicija 3.0.10 (Limita). Število A je *limita* zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$ tako, da za vse $n > n_0$ velja $|a_n - A| < \varepsilon$. V tem primeru pišemo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ in pravimo, da je zaporedje *konvergentno*. Če takega A ni, je zaporedje *divergentno*.

Trditev 3.0.11. Če $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, potem je A stekališče zaporedja in zunaj vsake okolice $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ leži le končno mnogo členov.

Izrek 3.0.12. Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima natanko eno stekališče.

Izrek 3.0.13 (Monotono konvergenčni izrek). Če je $\{a_n\}$ naraščajoče in omejeno, potem konvergira in velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n$. Če je $\{a_n\}$ padajoče in omejeno, potem konvergira in velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n$.

Primer 3.0.14. Zaporedje

$$a_n = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

ima člene $3, 5, 7, 9, \dots$. To je strogo naraščajoče zaporedje, ki ni navzgor omejeno. Njegova natančna spodnja meja je

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 3.$$

Primer 3.0.15. Zaporedje

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

je strogo padajoče in navzdol omejeno z 0. Velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n,$$

torej je limita enaka natančni spodnji meji.

Primer 3.0.16. Zaporedje

$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

je alternirajoče. Ni monotono in nima limite, ker se členi zaporedja gibljejo med 1 in -1 . Ima pa dve stekališči: -1 in 1 .

Računanje z limitami

Trditev 3.0.17. Če sta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni, potem veljajo standardna pravila:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n).$$

Če je $b_n \neq 0$ za vse n in $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, potem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

Primer 3.0.18.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 4n + 2}{2n^2 + 3n + 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Nekaj standardnih limit

Trditev 3.0.19. Za $c \in \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \begin{cases} 0, & |c| < 1, \\ 1, & c = 1, \end{cases}.$$

Trditev 3.0.20. Za $c > 0$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{1/n} = 1$.

Število e

Definicija 3.0.21. Definiramo zaporedji $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ in $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$. Velja, da je a_n naraščajoče in navzgor omejeno, b_n padajoče in navzdol omejeno, zato sta konvergentni in imata isto limito:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \approx 2,7182.$$

Število e je iracionalno.

Številske vrste

Definicija 3.0.22. Dano imamo neko zaporedje realnih števil

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Kaj bi bila vsota neskončno členov tega zaporedja?

Primer 3.0.23. Naj bo zaporedje dano s predpisom $a_n = n$. Koliko je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots?$$

Primer 3.0.24. Naj bo zaporedje dano s predpisom $a_n = (-1)^n$. Koliko je

$$-1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots?$$

Primer 3.0.25.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

Definicija 3.0.26. Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje realnih števil. Izraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

imenujemo *številska vrsta*, število a_n pa *splošni člen vrste*.

Definicija 3.0.27. S pomočjo členov zaporedja $\{a_n\}$ definiramo novo zaporedje delnih vsot $\{s_n\}$ s členi

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad \dots$$

Definicija 3.0.28. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentna*, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot $\{s_n\}$. Limito zaporedja delnih vsot imenujemo *vsota vrste*. Če vrsta ni konvergentna, pravimo, da je *divergentna*.

Primer 3.0.29. Preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

Ker je $s_n = 0$ za sode n in $s_n = -1$ za lihe n , ima zaporedje delnih vsot dve stekališči, torej ni konvergentno in je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergentna.

Primer 3.0.30. Izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ker velja

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

so delne vsote enake

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1,$$

in vrsta je konvergentna z vsoto 1.

Definicija 3.0.31. Vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

imenujemo *geometrijska vrsta*.

Trditev 3.0.32. Če je $q \neq 1$, potem je

$$s_n = \sum_{i=0}^n aq^i = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Za $|q| < 1$ je

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1 - q}.$$

Za $|q| \geq 1$ je *geometrijska vrsta divergentna*.

Dokaz. Naj bo $q \neq 1$ in

$$s_n = \sum_{i=0}^n aq^i = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^n).$$

Pomnožimo z $(1 - q)$:

$$(1 - q)s_n = a[(1 + q + \cdots + q^n) - (q + q^2 + \cdots + q^{n+1})] = a(1 - q^{n+1}).$$

Ker je $q \neq 1$, lahko delimo z $(1 - q)$ in dobimo

$$s_n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Če je $|q| < 1$, potem $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$, zato sledi

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}.$$

□

Primer 3.0.33. Izračunajmo neskončno geometrijsko vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n.$$

Tukaj je začetni člen $a = 3$ in količnik $q = \frac{1}{4}$, pri čemer je $|q| < 1$, zato vrsta konvergira.

Po formuli za neskončno geometrijsko vrsto dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1 - q}.$$

Vstavimo $a = 3$ in $q = \frac{1}{4}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4.$$

Zato je

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n = 4.$$

Izrek 3.0.34. *Potreben, ne pa tudi zadosten, pogoj za konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Definicija 3.0.35. Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

se imenuje *harmonična vrsta*.

Trditev 3.0.36. *Harmonična vrsta je divergentna.*

Opomba 3.0.37. Pri harmonični vrsti je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, vendar vrsta ni konvergentna. Pogoj $\lim a_n = 0$ torej ni zadosten za konvergenco vrste.

Izrek 3.0.38 (Primerjalni kriterij). *Naj za vrsti $\sum a_n$ in $\sum b_n$ velja $0 < a_n \leq b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

- Če je $\sum b_n$ konvergentna, potem je tudi $\sum a_n$ konvergentna.
- Če je $\sum a_n$ divergentna, potem je tudi $\sum b_n$ divergentna.

Izrek 3.0.39 (Kvocietni kriterij). *Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi, in naj obstaja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

- Če je $q < 1$, potem je vrsta konvergentna.
- Če je $q > 1$, potem je vrsta divergentna.
- Če je $q = 1$, kriterij odpove.

Izrek 3.0.40 (Korenski kriterij). *Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

- Če je $q < 1$, potem je vrsta konvergentna.
- Če je $q > 1$, potem je vrsta divergentna.
- Če je $q = 1$, kriterij odpove.

Primer 3.0.41. 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Splošni člen je

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Izračunamo kvocient zaporednih členov:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Ker je $q < 1$, je vrsta ****konvergentna****.

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$$

Splošni člen je

$$a_n = \frac{n!}{e^n}.$$

Izračunamo kvocient:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\frac{n!}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e} = \infty > 1.$$

Ker je $q > 1$, je vrsta ****divergentna****.

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)^{n(n+1)}}$$

Splošni člen je

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}.$$

Uporabimo korenski kriterij:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n-1}{(n+1)^{n(n+1)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n+1} = e^{-2} < 1.$$

Ker je $q < 1$, je vrsta ****konvergentna****.

Definicija 3.0.42. Vrsta $\sum a_n$ je *absolutno konvergentna*, če je konvergentna vrsta $\sum |a_n|$. Vrsta $\sum a_n$ je *pogojno konvergentna*, če je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna.

Izrek 3.0.43. Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

Definicija 3.0.44. Vrsta $\sum a_n$ je *alternirajoča*, če velja $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Izrek 3.0.45 (Leibnitzov kriterij). Če je pri alternirajoči vrsti $\sum a_n$ zaporedje absolutnih vrednosti $\{|a_n|\}$ padajoče proti 0, potem je vrsta konvergentna.

Primer 3.0.46. Preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ker velja $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ in $\frac{1}{n}$ monotonno pada, je vrsta konvergentna.

Diskretne porazdelitve: normalizacija in matematično upanje

V tem poglavju normalizacija pomeni preverjanje, da se verjetnostna funkcija (gostota) dejansko sešteje v 1. To je osnovni pogoj, saj mora vsota vseh verjetnosti (pri diskretni spremenljivki) oziroma integral gostote (pri zvezni spremenljivki) enaka 1, ker se mora dogodek z gotovostjo zgoditi v vzorčnem prostoru.

Bernoullijeva porazdelitev $\text{Bern}(p)$

Gostota:

$$f(x) = \begin{cases} p, & x = 1, \\ 1 - p, & x = 0, \end{cases} \quad 0 < p < 1.$$

Normalizacija:

$$\sum_{x \in \{0,1\}} f(x) = (1 - p) + p = 1.$$

Pričakovana vrednost:

$$E(X) = \sum_{x \in \{0,1\}} x f(x) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Opomba: Bernoullijeva porazdelitev je poseben primer binomske porazdelitve s parametroma $n = 1$ in p .

Diskretna enakomerna porazdelitev

Definicija 3.0.47. Naj bo $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ končna množica različnih realnih števil. Slučajna spremenljivka X , ki zavzame vrednost vsakega x_i z enako verjetnostjo $\frac{1}{n}$, se imenuje *diskretno enakomerno porazdeljena*. Njena porazdelitvena funkcija je

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Opomba 3.0.48. Normalizacija je očitna, saj velja

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Primer 3.0.49. Met pravične kocke: X predstavlja število pik na vrženi kocki. Potem

$$P(X = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Trditev 3.0.50 (Matematično upanje). *Za enakomerno porazdeljeno slučajno spremenljivko X na $\{x_1, \dots, x_n\}$ je*

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Če so vrednosti $1, 2, \dots, n$, potem velja

$$E(X) = \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n+1}{2},$$

kar dokažemo z indukcijo.

Primer 3.0.51. Za met kocke je pričakovano število pik

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3.5.$$

Binomska porazdelitev $\text{Bin}(n, p)$

Gostota:

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Normalizacija (binomski izrek):

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Pričakovano vrednost:

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Opazimo identiteto $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. Vstavimo:

$$E(X) = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

Zamenjajmo indeks $j = k - 1$:

$$E(X) = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}.$$

Ta vsota je $(p + (1-p))^{n-1} = 1$, torej

$$E(X) = np.$$

Geometrijska porazdelitev $\text{Geom}(p)$

Gostota:

$$f(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Normalizacija (geometrijska vrsta):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Pričakovano vrednost:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p.$$

Opazimo, da je $\sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1}$ odvod po spremenljivki p od geometrijske vrste $\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$. Ta odvod pa je enak

$$\frac{1}{p^2}$$

in tako dobimo

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Chapter 4

Funkcije, odvodi in integrali

Grafi in osnovne lastnosti

Definicija 4.0.1. Graf funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trditev 4.0.2. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je injektivna natanko tedaj, ko vsaka premica vzporedna z abscisno osjo seka njen graf največ enkrat.

Trditev 4.0.3. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je surjektivna natanko tedaj, ko vsaka premica vzporedna z abscisno osjo seka njen graf vsaj enkrat.

Definicija 4.0.4. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je

- *soda*, če $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in D$, njen graf pa je simetričen glede na ordinatno os;
- *liha*, če $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D$, njen graf pa je simetričen glede na izhodišče.

Opomba 4.0.5. Večina funkcij ni ne lihih ne sodih.

Primer 4.0.6. Funkcija $f(x) = x^2$ je soda, saj velja $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Njen graf (parabola) je simetričen glede na ordinatno os.

Primer 4.0.7. Funkcija $f(x) = x^3$ je liha, saj $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Njen graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Primer 4.0.8. Funkcija $f(x) = x^2 + x$ ni niti soda niti liha. Za $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$, kar ni enako ne $f(x)$ ne $-f(x)$.

Primer 4.0.9. Funkcija $f(x) = \cos(x)$ je soda, ker $\cos(-x) = \cos(x)$. Funkcija $f(x) = \sin(x)$ pa je liha, saj $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Monotone in omejene funkcije

Definicija 4.0.10. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je

- *naraščajoča*, če $f(x_1) \leq f(x_2)$ za vse $x_1 < x_2$ iz D ,
- *strogo naraščajoča*, če $f(x_1) < f(x_2)$ za vse $x_1 < x_2$,
- *padajoča*, če $f(x_1) \geq f(x_2)$ za vse $x_1 < x_2$,
- *strogo padajoča*, če $f(x_1) > f(x_2)$ za vse $x_1 < x_2$.

Funkcija je *monotona*, če je naraščajoča ali padajoča.

Definicija 4.0.11. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in D$. Število M imenujemo *zgornja meja*.

Podobno je *navzdol omejena*, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in D$.

Funkcija je *omejena*, če je hkrati navzgor in navzdol omejena.

Primer 4.0.12. Funkcija $f(x) = \arctan(x)$ je strogo naraščajoča, navzgor omejena z $\frac{\pi}{2}$ in navzdol omejena z $-\frac{\pi}{2}$.

—

Inverzne funkcije

Definicija 4.0.13. Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, injektivna funkcija. Potem obstaja *inverzna funkcija* $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$, ki zadošča pogoju

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D.$$

Primer 4.0.14. Če je $f(x) = 2x + 3$, potem dobimo $y = 2x + 3$, od tod $x = \frac{y-3}{2}$. Zato je inverzna funkcija $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.

Opomba 4.0.15. Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da graf funkcije f prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov $y = x$.

—

Polinomi in racionalne funkcije

Definicija 4.0.16. Polinom stopnje n je funkcija oblike

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Definicijsko območje polinoma je celotna množica $\mathbb{R}$.

Izrek 4.0.17 (Osnovni izrek algebre). *Polinom stopnje n ima natanko n kompleksnih ničel, pri čemer so nekatere lahko večkratne.*

Primer 4.0.18. Polinom $p(x) = -x^3 + 3x + 2$ ima ničle $x = -2$, $x = 1$ in $x = ?$. Ker je polinom tretje stopnje, ima natanko tri realne ničle.

Definicija 4.0.19. *Racionalna funkcija* je funkcija oblike

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta p in q polinoma in $q(x) \neq 0$. Definicijsko območje racionalne funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\}$.

Primer 4.0.20. Funkcija

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2-4}$$

ima ničle pri $x = 0$ in $x = -1$, pole pa pri $x = \pm 2$.

Ekspontentne in logaritemske funkcije

Definicija 4.0.21. Za $a > 0$, $a \neq 1$, je *eksponentna funkcija*

$$f(x) = a^x.$$

Najpogosteje uporabljamo osnovo e , tj. $f(x) = e^x$.

Opomba 4.0.22. Eksponentna funkcija je strogo monotona: za $a > 1$ narašča, za $0 < a < 1$ pada. Zaloga vrednosti je vedno $(0, \infty)$.

Definicija 4.0.23. *Logaritemska funkcija* je inverzna eksponentni funkciji $x \mapsto a^x$ in jo označimo

$$f(x) = \log_a(x), \quad x > 0.$$

Za osnovo $a = e$ dobimo *naravni logaritem* $f(x) = \log x$.

Primer 4.0.24. Velja $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$. Na primer, $\log_2(8) = 3$.

Trigonometrične funkcije funkcije

Definicija 4.0.25. Osnovne *trigonometrične funkcije* so sinus, kosinus, tangens in kotangens. Njihovo definicijsko območje razširimo na vsa realna števila, razen tam, kjer so imenovalci enaki 0.

Primer 4.0.26. Velja identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pa tudi $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Definicija 4.0.27. Inverzne trigonometrične funkcije imenujemo *ciklometrične funkcije*:

$$\arcsin, \quad \arccos, \quad \arctan.$$

Definirane so na ustreznih intervalih, kjer so sinus, kosinus in tangens injektivni.

glejte prosojnice —

Zveznost funkcij

Definicija 4.0.28 (Zveznost v točki). Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f je *zvezna* v točki $x_0 \in D$, če

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (\text{tj. } \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)).$$

Pravimo, da je f zvezna na D , če je zvezna v vsaki točki iz D .

Trditev 4.0.29 (Zamenjava limita in zvezne funkcije). Če je g zvezna v točki $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, potem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right).$$

Računska pravila za zvezne funkcije. Če sta f in g zvezni (na istem območju definicije), potem so zvezne tudi:

$$f + g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (\text{kjer } g \neq 0), \quad g \circ f.$$

Trditev 4.0.30 (Predznak v krajiščih $\Rightarrow$ ničla (poseben primer IVI)). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in naj bo $f(a)f(b) < 0$. Teda obstaja $x_0 \in [a, b]$ tako, da je $f(x_0) = 0$.

Trditev 4.0.31 (Omejenost na zaprtem intervalu). *Zvezna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je omejena.*

Opomba 4.0.32. Če interval ni zaprt, to ni nujno res. Na primer $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, je na $(0, 1)$ zvezna in neomejena.

Trditev 4.0.33 (Izrek o največji in najmanjši vrednosti). *Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Potem f na $[a, b]$ doseže svojo natančno spodnjo in zgornjo mejo:*

$$\exists x_m, x_M \in [a, b] : \quad f(x_m) = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x_M) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Trditev 4.0.34 (Izrek o vmesnih vrednostih). *Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in naj bosta*

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Potem f na $[a, b]$ zavzame vsako vrednost iz intervala $[m, M]$: za vsak $t \in [m, M]$ obstaja $x_t \in [a, b]$ s $f(x_t) = t$.

Odvod

Definicija in motivacija

Pri proučevanju funkcij nas zanima, kako se funkcija spreminja: ali njene vrednosti naraščajo, padajo, in kako hitre so te spremembe. Hitrost spreminjanja funkcije $f(x)$ v odvisnosti od spremenljivke x opredelimo s pomočjo odvoda.

Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$. Ko se vrednost spremenljivke poveča iz x_0 na $x_0 + h$, se vrednost funkcije spremeni za

$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Kvocien

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

imenujemo *diferencialni kvocien*. To je smerni koeficient premice skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Definicija 4.0.35. Če obstaja limita

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pravimo, da je f odvedljiva v x_0 , število $f'(x_0)$ pa je njen *odvod*.

Primer 4.0.36. Izračunajmo po definiciji odvod $f(x) = x^2 + x$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 1) = 2x + 1.$$

Primer 4.0.37. Za $f(x) = x^x$ ($x > 0$) zapišemo $f(x) = e^{x \log x}$. Potem po verižnem pravilu

$$f'(x) = x^x (\log x + 1).$$

—

Tangenta

Definicija 4.0.38. Premico skozi $(x_0, f(x_0))$ s smernim koeficientom $f'(x_0)$ imenujemo *tangenta* na graf funkcije f v tej točki.

Primer 4.0.39. Za $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$ je $f'(1) = 2$. Tangenta v točki $(1, 1)$ je $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

—

Pravila za odvajanje

- $(c)' = 0, \quad (cf)' = cf'.$
- $(f + g)' = f' + g'.$
- $(fg)' = f'g + fg'.$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$ če $g \neq 0.$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$

Primer 4.0.40. Odvajajmo $f(x) = \sin(x^2)$. Notranja funkcija je $g(x) = x^2$, zunanja $h(u) = \sin u$.

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2).$$

Primer 4.0.41. Naj bo $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. Potem

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

—

Tabela odvodov

$$\begin{aligned}
(x^r)' &= rx^{r-1}, & (e^x)' &= e^x, & (a^x)' &= a^x \log a, \\
(\log x)' &= \frac{1}{x}, & (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Primer 4.0.42. Izračunajmo

$$\frac{d}{dx}(\log(\sin x)) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x,$$

kjer je $x \in (0, \pi)$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x) \quad \text{ozioroma} \quad f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h.$$

Višji odvodi nekaterih elementarnih funkcij.

- Če je $f(x) = e^x$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

- Če je $f(x) = x^n$ (za celo $n \geq 0$), potem za $0 \leq k \leq n$ velja

$$f^{(k)}(x) = n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k},$$

posebej

$$f^{(n)}(x) = n!, \quad f^{(m)}(x) = 0 \text{ za } m > n.$$

- Če je $f(x) = \sin x$, potem

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x.$$

Lastnosti odvedljivih funkcij.

Izrek. Če je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $x_0 \in (a, b)$, potem je f v točki x_0 tudi zvezna.

Izrek. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva in naj bo $x_0 \in (a, b)$. Če je $f'(x_0) > 0$, je f v točki x_0 naraščajoča (lokalno). Če je $f'(x_0) < 0$, je f v točki x_0 padajoča (lokalno).

Definicija 4.0.43 (Stacionarna točka). Če za odvedljivo funkcijo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f'(x_0) = 0$ za $x_0 \in (a, b)$, pravimo, da je x_0 *stacionarna točka* funkcije f . Tangenta na graf v stacionarni točki je vzporedna abscisni osi.

Definicija 4.0.44 (Lokalni minimum/maksimum, ekstrem). Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ima v točki $x_0 \in (a, b)$ *lokalni minimum*, če obstaja $\delta > 0$ tako, da $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ za vsak $|h| < \delta$. Ima *lokalni maksimum*, če obstaja $\delta > 0$ tako, da $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ za vsak $|h| < \delta$. Če ima f v x_0 lokalni minimum ali maksimum, pravimo, da ima v x_0 *lokalni ekstrem*.

Izrek 4.0.45 (Fermatov izrek). Če ima odvedljiva funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in (a, b)$ lokalni ekstrem, potem je $f'(x_0) = 0$; torej je x_0 stacionarna točka.

Opomba 4.0.46. Obratno ne velja nujno: npr. $f(x) = x^3 + 1$ ima v $x_0 = 0$ stacionarno točko, vendar tam ni lokalnega ekstrema.

Izrek 4.0.47 (Rolleov izrek). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva in naj bo $f(a) = f(b)$. Potem obstaja vsaj ena točka $x_0 \in (a, b)$, za katero velja $f'(x_0) = 0$.

Izrek 4.0.48 (Lagrangeov izrek o povprečni vrednosti). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva. Potem obstaja $x_0 \in (a, b)$, da

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Izrek 4.0.49. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva in naj bo $f'(x) = 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Tedaj je f konstantna funkcija.

Izrek 4.0.50. Naj bosta $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljivi in naj bo $f'(x) = g'(x)$ za vse $x \in [a, b]$. Potem obstaja konstanta $c \in \mathbb{R}$ tako, da $f(x) = g(x) + c$.

Izrek 4.0.51 (Kriterij z znakom prvega odvoda). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva in $x_0 \in (a, b)$ stacionarna točka. Če f' v okolici x_0 (levo-desno) zamenja predznak, ima f v x_0 lokalni ekstrem (prehod $+$ $\rightarrow$ $-$: maksimum; $-$ $\rightarrow$ $+$: minimum). Če ima f' v okolici x_0 , razen v x_0 , isti predznak, potem f v x_0 nima lokalnega ekstrema.

Definicija 4.0.52 (Konveksnost). Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna na $[a, b]$, če za vsak $[c, d] \subseteq [a, b]$ in vsak $x \in [c, d]$ velja

$$f(x) \leq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c} (x - c).$$

Torej graf f na $[c, d]$ leži pod tetivo skozi točki $(c, f(c))$ in $(d, f(d))$.

Definicija 4.0.53 (Konkavnost). Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je konkavna na $[a, b]$, če za vsak $[c, d] \subseteq [a, b]$ in vsak $x \in [c, d]$ velja

$$f(x) \geq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c} (x - c).$$

Torej graf f na $[c, d]$ leži nad tetivo skozi $(c, f(c))$ in $(d, f(d))$.

Definicija 4.0.54 (Prevoj). Točka x_0 je prevoj funkcije f , če se v x_0 f spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno.

Izrek 4.0.55 (Drugi odvod in oblika grafa). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva.

- Če $f''(x) > 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f konveksna na $[a, b]$.
- Če $f''(x) < 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f konkavna na $[a, b]$.
- Če $f''(x_0) = 0$ in f'' pri prehodu skozi x_0 zamenja predznak, je x_0 prevoj.

Izrek 4.0.56 (Drugi odvod v stacionarni točki). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva in $x_0 \in (a, b)$ stacionarna točka ($f'(x_0) = 0$).

- Če $f''(x_0) > 0$, ima f v x_0 lokalni minimum.
- Če $f''(x_0) < 0$, ima f v x_0 lokalni maksimum.

Izrek 4.0.57 (Ekstrem na zaprtem intervalu). Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Potem f na $[a, b]$ doseže največjo in najmanjšo vrednost. Če je f odvedljiva, se lahko notranji ekstremi pojavijo v stacionarnih točkah; ekstrem je lahko tudi v krajiščih ali tam, kjer f ni odvedljiva.

Primer 4.0.58 (Ekstremi funkcije $f(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 2)$). Zapišimo $g(x) = x^2 + x$, tedaj $f(x) = g(x)^2 - 4$.

$$f'(x) = 2g(x)g'(x) = 2(x^2 + x)(2x + 1) = 2x(x + 1)(2x + 1).$$

Stacionarne točke so

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -1.$$

Drugi odvod:

$$f''(x) = 12x^2 + 12x + 2.$$

Klasifikacija:

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{lokalni minimum pri } x = 0, \quad f''(-\frac{1}{2}) = -1 < 0 \Rightarrow \text{lokalni maksimum,}$$

$$f''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{lokalni minimum pri } x = -1.$$

—

L'Hospitalovo pravilo

Izrek 4.0.59. Če $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)}$ vodi v obliko $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$, potem

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)},$$

če desna limita obstaja.

Primer 4.0.60.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Primer 4.0.61.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Integrali

Nedoločeni integral

Nedoločen integral

Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dana funkcija. Funkcijo $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, za katero za vsak $x \in (a, b)$ velja

$$F'(x) = f(x),$$

imenujemo *nedoločen integral* (oz. *primitivna funkcija*) funkcije f in pišemo

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Izrek. Če je F nedoločen integral funkcije f , je tudi $F + C$ nedoločen integral funkcije f za poljubno konstanto C . Obratno, vsak nedoločen integral funkcije f je oblike $F + C$ za neko fiksno primitivno funkcijo F .

Tabela integralov elementarnih funkcij

Za konstanto $C \in \mathbb{R}$ veljajo:

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), & \int \frac{1}{x} dx &= \log |x| + C, \\ \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1), \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \cos x dx &= \sin x + C, \\ \int \sec^2 x dx &= \tan x + C, & \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, & \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

Pravila za integriranje

Vsa pravila sledijo iz pravil za odvajanje.

- **Linearnost:**

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

- **Zamenjava spremenljivke (substitucija).** Če je $x = x(t)$ odvedljiva funkcija in obstaja $\int f(x) dx$, potem

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) x'(t) dt.$$

- **Integracija po delih.** Če obstaja eden izmed integralov $\int f(x)g'(x) dx$ in $\int f'(x)g(x) dx$, potem obstaja tudi drugi in

$$\int f(x)g'(x) dx + \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) + C,$$

kar običajno zapišemo kot

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Določen integral in Riemannove vsote

Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in (zaradi zveznosti) omejena funkcija. Ploščino med grafom f in osjo x na $[a, b]$ aproksimiramo s ploščinami pravokotnikov.

Razdelimo $[a, b]$ na delitev $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ in na vsakem $[x_{k-1}, x_k]$ izberemo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. *Riemannova (integralska) vsota* je

$$S(f; \mathcal{D}, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

Če obstaja limita teh vsot, ko gre dolžina najdaljšega podintervala $\max_k (x_k - x_{k-1})$ proti 0, pravimo, da je f *Riemannovo integrabilna* na $[a, b]$ in definiramo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

(Dodatek) Temeljni izrek integralnega računa. Če je f zvezna na $[a, b]$ in F njena primitivna funkcija, potem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Izrek 4.0.62. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Potem je f na tem intervalu integrabilna.

Opomba 4.0.63. Vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu je integrabilna. Integrabilnih funkcij pa je še veliko več. Na primer, vsaka odsekoma zvezna funkcija je integrabilna (funkcija je odsekoma zvezna, če ima končno ali števno neskončno točk nezveznosti).

Lastnosti določenega integrala

1. Integracijsko spremenljivko lahko poljubno označimo:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

2. Če integralu zamenjamo meji, se spremeni predznak:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3. Integral z enakima mejama je enak nič:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4. Naj bo f integrabilna na intervalu $[a, b]$ in naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$ konstanta. Potem je

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

5. Naj bosta f in g integrabilni na intervalu $[a, b]$. Potem je

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

6. Naj bo $a < c < b$. Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ integrabilna natanko tedaj, ko je integrabilna na vsakem izmed podintervalov $[a, c]$ in $[c, b]$. Velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

7. Če sta f in g integrabilni in je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, potem je

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Izrek 4.0.64 (Izrek o povprečni vrednosti). *Naj bo m natančna spodnja meja in M natančna zgornja meja integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$. Potem obstaja tako število P , da je $m \leq P \leq M$ in*

$$P = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Če je funkcija f tudi zvezna na intervalu $[a, b]$, potem obstaja vsaj ena taka točka $\xi \in [a, b]$, da je

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Opomba 4.0.65. Naj bo f pozitivna funkcija. Ploščina območja pod grafom funkcije f nad intervalom $[a, b]$ je:

- večja od ploščine pravokotnika z osnovnico $[a, b]$ in višino, ki je enaka minimalni vrednosti funkcije f ;

- manjša od ploščine pravokotnika z osnovnico $[a, b]$ in višino, ki je enaka maksimalni vrednosti funkcije f .

Torej je ploščina območja pod grafom funkcije f nad intervalom $[a, b]$ enaka ploščini pravokotnika z osnovnico $[a, b]$ in višino, ki je med minimalno in maksimalno vrednostjo funkcije f .

Izrek 4.0.66. *Naj bo funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$. Potem je*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Torej je absolutna vrednost integrala manjša ali enaka integralu absolutne vrednosti.

Dokaz. Za vsako integralsko vsoto po trikotniški neenakosti velja

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}),$$

pri čemer smo upoštevali, da je $|x_k - x_{k-1}| = x_k - x_{k-1}$. V limiti je leva stran neenakosti enaka $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$, desna stran neenakosti pa je enaka $\int_a^b |f(x)| dx$. $\square$

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Definicija 4.0.67. Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in zato integrabilna funkcija. Potem za vsak $x \in [a, b]$ obstaja integral $\int_a^x f(t) dt$, zato lahko definiramo funkcijo $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Izrek 4.0.68 (Osnovni izrek analize). *Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

odvedljiva in velja

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Opomba 4.0.69. Funkcija F je zvezna, saj je vsaka odvedljiva funkcija tudi zvezna.

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$

Izrek 4.0.70 (Newton–Leibnitzeva formula). *Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj bo G poljuben nedoločen integral funkcije f , torej*

$$G(x) = \int f(x) dx.$$

Potem je

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Opomba 4.0.71. Newton–Leibnitzeva formula pove, kako lahko izračunamo določeni integral $\int_a^b f(x) dx$ funkcije f na intervalu $[a, b]$. Najprej poiščemo nedoločen integral G funkcije f in nato izračunamo razliko funkcijskih vrednosti $G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$.

Tudi v določeni integral lahko vpeljemo novo spremenljivko.

Izrek 4.0.72 (Substitucija). *Naj bo $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija, torej je u' zvezna funkcija, in naj bo f zvezna funkcija na zalogi vrednosti funkcije u . Potem je*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

Prav tako lahko uporabimo pri računanju določenih integralov tudi metodo *per partes*.

Izrek 4.0.73 (Računanje per partes). *Če sta f in g odvedljivi funkciji na intervalu $[a, b]$, potem velja*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Posplošeni integral

Oglejmo si, kako lahko posplošimo definicijo določenega integrala v primeru, ko je funkcija f neomejena, in v primeru, ko je interval, po katerem integriramo funkcijo f , neomejen.

Če funkcija f v enem izmed krajišč intervala $[a, b]$, na primer v b , ni omejena, obstaja pa integral na vsakem manjšem intervalu in obstaja tudi limita, potem pišemo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Če je funkcija f integrabilna na vsakem končnem intervalu in obstaja tudi limita, ko meje intervala poljubno povečamo, potem pišemo

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx.$$

Uporaba določenega integrala

Izračun ploščine lika. Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivna integrabilna funkcija. Potem je po definiciji določenega integrala

$$\int_a^b f(x) dx$$

ravno ploščina med abscisno osjo in grafom funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Če integrabilna funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ ni povsod pozitivna, potem interval $[a, b]$ razdelimo na taki podmnožici, da je na eni podmnožici funkcija nenegativna in na drugi negativna. Ploščina med abscisno osjo in grafom funkcije f je potem vsota integrala funkcije f na prvi podmnožici in integrala funkcije f na drugi podmnožici, pomnoženega z -1 .

Naj bosta $g, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilni funkciji in naj bo $f(x) \geq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je ploščina območja med grafoma funkcij f in g na intervalu $[a, b]$ enaka

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Če $f(x)$ ni večja od $g(x)$ za vsak x , potem, podobno kot prej, razdelimo interval $[a, b]$ na dve podmnožici in na podmnožici, kjer je $f(x) < g(x)$, integral pomnožimo z -1 .

Posledica: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ če je f liha funkcija in $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x)$, če je f soda.

Chapter 5

Matematično upanje je abstraktna idealizacija povprečja.

Definicija. Matematično upanje ali pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X , ki ga označimo z μ ali $E(X)$, je definirano s predpisom

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i),$$

kjer $x_1, \dots, x_n$ označujejo možne vrednosti slučajne spremenljivke X , $f(x_i) = P(X = x_i)$ pa pripadajoče verjetnosti.

Primer. Pri metu kovanca dobimo 2 evra, če pade zgornja stran kovanca, če pa pade spodnja stran kovanca, dva evra plačamo (tj. izgubimo 2 evra). Verjetnost, da pade zgornja stran kovanca, je 0,49, verjetnost, da pade spodnja stran kovanca, pa 0,51.

Kolikšna je pričakovana izguba, če smo vrgli kovanec 100-krat?

Rešitev. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki predstavlja *dobiček pri enem metu* (v evrih). Potem velja

$$X = \begin{cases} 2, & \text{z verjetnostjo } 0,49, \\ -2, & \text{z verjetnostjo } 0,51. \end{cases}$$

Zato je matematično upanje pri enem metu

$$E(X) = 2 \cdot 0,49 + (-2) \cdot 0,51 = 0,98 - 1,02 = -0,04.$$

Pričakovan dobiček pri enem metu je torej $-0,04$ evra, kar pomeni pričakovano *izgubo* 0,04 evra.

Naj bo zdaj $S_{100} = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ vsota dobičkov pri 100 neodvisnih metih. Potem

$$E(S_{100}) = \sum_{k=1}^{100} E(X_k) = 100 \cdot E(X) = 100 \cdot (-0,04) = -4.$$

Pričakovana izguba pri 100 metih je torej

$$\boxed{4 \text{ evre.}}$$

Definicija. Varianca slučajne spremenljivke X , ki jo označimo z σ^2 ali $V(X)$ ali $\text{Var}(X)$, je definirana s predpisom

$$V(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i),$$

kjer je $\mu = E(X)$ matematično upanje slučajne spremenljivke X .

Standardni odklon (standardna deviacija) slučajne spremenljivke X je

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}.$$

Velja tudi uporabna formula

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Primer. Izračunajmo varianco slučajne spremenljivke X iz prejšnjega primera.

Rešitev. Iz prejšnjega primera vemo, da

$$P(X = 2) = 0,49, \quad P(X = -2) = 0,51,$$

in da je

$$E(X) = -0,04.$$

Najprej izračunamo

$$E(X^2) = 2^2 \cdot 0,49 + (-2)^2 \cdot 0,51 = 4 \cdot 0,49 + 4 \cdot 0,51 = 4 \cdot (0,49 + 0,51) = 4.$$

Zato je varianca

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 4 - (-0,04)^2 = 4 - 0,0016 = 3,9984.$$

Standardni odklon je

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \approx \sqrt{3,9984} \approx 1,9996 \approx 2.$$

Opomba. Slučajni spremenljivki imata lahko enako matematično upanje in različno varianco. To pomeni, da imata lahko enako povprečno vrednost, vendar se ena okoli te vrednosti bolj »razprši« kot druga.

Trditev. Za diskretno slučajno spremenljivko X z gostoto verjetnosti f in za funkcijo h velja

$$E(h(X)) = \sum_{i=1}^n h(x_i) f(x_i),$$

kjer $x_1, \dots, x_n$ označujejo vrednosti slučajne spremenljivke X .

Definicija. Slučajno spremenljivko, ki je enaka številu uspešnih Bernoullijevih poskusov, imenujemo *binomska slučajna spremenljivka*.

Če je X binomska slučajna spremenljivka s parametroma n in p , potem je njena gostota verjetnosti

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

Trditev. Če je X binomska slučajna spremenljivka s parametroma n in p , potem

$$\mu = E(X) = np,$$

varianca pa je

$$V(X) = np(1-p).$$

Definicija. Slučajno spremenljivko, ki je enaka številu Bernoullijevih poskusov do prvega uspešnega poskusa, imenujemo *geometrijska slučajna spremenljivka*.

Gostota verjetnosti geometrijske slučajne spremenljivke X s parametrom p je

$$f(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1} p, \quad x = 1, 2, \dots$$

Trditev. Če je X geometrijska slučajna spremenljivka s parametrom p , potem je

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p},$$

varianca pa je

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Definicija. Naj bo poskus sestavljen iz Bernoullijevih poskusov, ki so med seboj neodvisni, v vsakem poskusu sta le dva možna izida (»uspeh« ali »neuspeh«), verjetnost uspeha v vsakem poskusu pa je enaka p .

Slučajno spremenljivko, ki je enaka številu Bernoullijevih poskusov do r -tega uspešnega poskusa, imenujemo *negativna binomska slučajna spremenljivka*.

Gostota verjetnosti negativne binomske slučajne spremenljivke X je

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r, \quad x = r, r+1, r+2, \dots$$

Trditev. Če je X negativna binomska slučajna spremenljivka s parametroma r in p , potem je

$$\mu = E(X) = \frac{r}{p},$$

varianca pa je

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Primer. Elektronska tehtnica na avtomatski polnilni liniji ustavi proizvodnjo, če so tri embalaže napolnjene manj od zahtevane vrednosti. Verjetnost, da je polnjenje prelahko, je $p = 0,001$. Vsa polnjenja so neodvisna.

1. Kolikšna je verjetnost, da se proizvodnja ustavi po 3, po 100, po 1000, po 3000 napolnjenih embalah?
2. Koliko embalaž je v povprečju napolnjenih, preden se proizvodnja ustavi?

Rešitev.

Naj bo X slučajna spremenljivka, ki označuje *število vseh napolnjenih embalaž do ustavitve proizvodnje* (vključno s tisto embalažo, ki povzroči ustavitev).

Ustavitev se zgodi, ko se pojavi *tretja* prelahko napolnjena embalaža. Vsaka embalaža je neodvisen Bernoullijev poskus z verjetnostjo »uspeha« (prelahkega polnjenja) $p = 0,001$.

Zato je X negativna binomska slučajna spremenljivka s parametroma

$$r = 3, \quad p = 0,001.$$

Velja torej

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r = \binom{x-1}{2} (1-p)^{x-3} p^3, \quad x = 3, 4, 5, \dots$$

1. Za posamezne vrednosti dobimo:

$$P(X = 3) = \binom{2}{2} (1-p)^0 p^3 = 1 \cdot 1 \cdot p^3 = p^3 = (0,001)^3 = 10^{-9}.$$

$$P(X = 100) = \binom{99}{2} (1-p)^{97} p^3.$$

$$P(X = 1000) = \binom{999}{2} (1-p)^{997} p^3.$$

$$P(X = 3000) = \binom{2999}{2} (1-p)^{2997} p^3.$$

To so vse zelo majhne verjetnosti; največja verjetnost bo v okolici matematičnega upanja $E(X)$ (glej točko 2).

2. Iz trditve za negativno binomsko porazdelitev sledi

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0,001} = 3000.$$

V povprečju bo torej napolnjenih

3000 embalaž

preden se proizvodnja ustavi.

Definicija. Naj bo v končni množici z N elementi K »slabih« elementov. Iz množice naključno brez vračanja izberemo n elementov. Slučajno spremenljivko, ki je enaka številu slabih elementov v vzorcu, imenujemo *hipergeometrijska slučajna spremenljivka*.

Gostota verjetnosti hipergeometrijske slučajne spremenljivke X je

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, \dots, n,$$

pri čemer so vrednosti x omejene tudi z $0 \leq x \leq K$ in $0 \leq n - x \leq N - K$ (tj. x ne more biti večje od K in ne manjše od $n - (N - K)$).

Če označimo $p = \frac{K}{N}$ (delež slabih elementov v populaciji), potem velja:

Trditev. Za hipergeometrijsko slučajno spremenljivko X velja

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}.$$

Naj bo X binomska slučajna spremenljivka za n Bernoullijevih poskusov z verjetnostjo p . Označimo

$$E(X) = np = \lambda.$$

Potem je

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}.$$

Za $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ tako, da $np = \lambda$ ostane konstanten, dobimo Poissonovo porazdelitev.

Poissonov proces. Na danem intervalu se naključno pojavljajo števila. V povprečju se jih pojavi λ . Denimo, da lahko interval razdelimo na podintervale, tako da velja:

- verjetnost, da se na podintervalu pojavi več kot eno število, je zanemarljiva (približno 0);
- verjetnost, da se na podintervalu pojavi število, je enaka za vse podintervale in sorazmerna z dolžino podintervala;
- če se število pojavi na nekem podintervalu, je to neodvisno od dogajanja na ostalih podintervalih.

Definicija. Slučajna spremenljivka X , ki je enaka številu pojavljenih »dogodkov« na intervalu pri Poissonovem procesu, se imenuje *Poissonova slučajna spremenljivka* s parametrom $\lambda > 0$.

Definicija. Gostota verjetnosti (porazdelitvena funkcija mase) Poissonove slučajne spremenljivke X je

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Trditev. Za Poissonovo slučajno spremenljivko X s parametrom λ velja

$$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda.$$

Primer. Pri proizvodnji optičnega diska se na 1 cm^2 v povprečju pojavi 0,1 delec nečistoče. Proizvajamo disk s površino 100 cm^2 .

1. Kolikšna je verjetnost, da se na disku pojavi 12 delcev nečistoče?
2. Optični disk zavržemo, če ima več kot 3 delce nečistoče. Kolikšna je verjetnost, da izdelani disk zavržemo?

Rešitev.

Naj bo X slučajna spremenljivka, ki predstavlja število delcev nečistoče na enem disku.

Povprečno število delcev na celotnem disku je

$$\lambda = 0,1 \cdot 100 = 10.$$

Zato modeliramo X kot Poissonovo slučajno spremenljivko s parametrom $\lambda = 10$:

$$P(X = x) = \frac{e^{-10} 10^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

1. Verjetnost, da se na disku pojavi natanko 12 delcev nečistoče, je

$$P(X = 12) = \frac{e^{-10} 10^{12}}{12!}.$$

To je lahko tudi numerično približamo (po želji), a v zapiskih običajno pustimo v tej obliki.

2. Disk zavržemo, če ima več kot 3 delce, torej za dogodek $\{X > 3\}$. Zato

$$P(\text{disk zavržemo}) = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^3 P(X = k).$$

Ker je $X \sim \text{Poisson}(10)$, dobimo

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 \frac{e^{-10} 10^k}{k!} = e^{-10} \left(1 + 10 + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} \right),$$

zato

$$P(\text{disk zavržemo}) = 1 - e^{-10} \left(1 + 10 + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} \right).$$

To je iskana verjetnost. Če želimo, jo lahko še numerično ocenimo, vendar je v teoretičnih zapiskih tak zapis povsem zadovoljiv.

Zvezna slučajna spremenljivka.

Primeri:

- temperatura spojine ob koncu kemične reakcije;
- dolžina sestavnega dela;

- napetost v napeljavi;
- potreben čas, da se izvede poskus.

Definicija. Zaloga vrednosti zvezne slučajne spremenljivke X je enaka množici realnih števil $\mathbb{R}$. Gostota verjetnosti (verjetnostna funkcija) f zvezne slučajne spremenljivke X je funkcija, za katero velja:

- $f(x) \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$;

-

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1;$$

- za vsak interval $[a, b]$ velja

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Opomba. Za zvezno slučajno spremenljivko velja

$$P(X = a) = 0$$

za vsak $a \in \mathbb{R}$.

Opomba. Za poljubni realni števili $x_1 < x_2$ velja

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2),$$

ker je verjetnost posamezne točke enaka 0.

Definicija. *Kumulativna ali porazdelitvena funkcija* F zvezne slučajne spremenljivke X je funkcija

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Trditev. Če je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti f , potem je

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

za vse tiste x , kjer je f zvezna.

Definicija. Matematično upanje (pričakovana vrednost) zvezne slučajne spremenljivke X je definirano s predpisom

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Definicija. Varianca slučajne spremenljivke X je definirana s predpisom

$$V(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Standardni odklon (standardna deviacija) slučajne spremenljivke X je

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}.$$

Trditev. Za zvezno slučajno spremenljivko X z gostoto verjetnosti f in za funkcijo h velja

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx.$$

5.1 Primeri zveznih slučajnih spremenljivk

Enakomerna porazdelitev

Definicija 5.1.1. Zvezna slučajna spremenljivka X je *enakomerno porazdeljena* na intervalu $[a, b]$, kar označimo z

$$X \sim \mathcal{U}(a, b),$$

če ima gostoto verjetnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Trditev 5.1.2. Naj bo $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Teda velja

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

in

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Dokaz. Ker je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ na $[a, b]$, dobimo za pričakovano vrednost

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx.$$

Izračunamo integral:

$$\int_a^b x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2}.$$

Zato

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Za varianco uporabimo definicijo

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Najprej izračunamo $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) \, dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \, dx.$$

Integral je

$$\int_a^b x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Torej

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}.$$

Uporabimo razcep $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$:

$$E(X^2) = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Ker je $E(X) = \frac{a+b}{2}$, dobimo

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2.$$

Sedaj

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4},$$

zato

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}.$$

Zapišimo z enakim imenovalcem 12:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)}{12} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

S tem je trditev dokazana. □

Enakomerna porazdelitev – primer

Primer 5.1.3. Slučajna spremenljivka X je enaka toku (v mA), ki ga izmerimo v tanki bakreni žici. Privzamemo, da je X enakomerno porazdeljena z vrednostmi od 0 do 10 mA, torej

$$X \sim \mathcal{U}(0, 10).$$

1. Kolikšna je verjetnost, da je izmerjeni tok manjši od 2 mA?

Ker je gostota

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10-0} = \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

dobimo

$$P(X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \cdot 2 = 0,2.$$

2. Koliko je matematično upanje in koliko standardna deviacija?

Za enakomerno porazdelitev $\mathcal{U}(a, b)$ veljata

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Tukaj je $a = 0$, $b = 10$, zato

$$E(X) = \frac{0+10}{2} = 5 \text{ mA},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3},$$

standardna deviacija pa je

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2,89 \text{ mA}.$$

Normalna porazdelitev

Definicija 5.1.4. Zvezna slučajna spremenljivka X je *normalno porazdeljena* s parametroma $\mu \in \mathbb{R}$ in $\sigma > 0$, kar označimo z

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),$$

če je njena gostota verjetnosti

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Trditev 5.1.5. Naj bo $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Tedaj velja

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Dokaz. Dokažimo le pričakovano vrednost pričakovano vrednost:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Uvedemo novo spremenljivko

$$y = x - \mu \implies x = y + \mu, \quad dx = dy.$$

Dobimo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (y + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

Razcepimo integral na dva dela:

$$\mathbb{E}(X) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy}_{I_1} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy}_{I_2}.$$

- Integral I_1 je 0, ker je funkcija $y \mapsto y e^{-y^2/(2\sigma^2)}$ liha, integriramo pa po simetričnem intervalu $(-\infty, \infty)$:

$$I_1 = 0.$$

- Integral I_2 je enak 1, saj gre za celoten integral gostote normalne porazdelitve s parametroma $(0, \sigma)$:

$$I_2 = 1.$$

Tako dobimo

$$\mathbb{E}(X) = 0 + \mu \cdot 1 = \mu.$$

Standardizirana normalna spremenljivka

Definicija 5.1.6. Zvezna slučajna spremenljivka X je *standardizirana normalna spremenljivka*, če je $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, torej ima $\mu = 0$ in $\sigma = 1$. Označimo jo z Z in njena gostota je

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Trditev 5.1.7. *Naj bo X slučajna spremenljivka s končno varianco $\text{Var}(X)$ in*

$$Y = a + bX,$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$. Potem velja

$$\text{Var}(Y) = b^2 \text{Var}(X).$$

Dokaz. Po definiciji variance imamo

$$\text{Var}(Y) = \text{E}[(Y - \text{E}(Y))^2].$$

Ker je

$$\text{E}(Y) = \text{E}(a + bX) = a + b \text{E}(X),$$

sledi

$$Y - \text{E}(Y) = a + bX - (a + b \text{E}(X)) = b(X - \text{E}(X)).$$

Zato

$$\text{Var}(Y) = \text{E}[(Y - \text{E}(Y))^2] = \text{E}[b^2(X - \text{E}(X))^2] = b^2 \text{E}[(X - \text{E}(X))^2] = b^2 \text{Var}(X).$$

□

Trditev 5.1.8. *Naj bo X normalna slučajna spremenljivka s parametroma μ in $\sigma > 0$, torej $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Potem je*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

standardizirana normalna spremenljivka, tj. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Dokaz. $\text{E}(Z) = 0$, izračun za varianco pa sledi iz prejšnje trditve.

□

Primer – teža prvošolcev

Statistični podatki so pokazali, da 15% slovenskih prvošolcev tehta manj kot 25 kg, 10% pa več kot 33 kg. Predpostavimo, da je teža prvošolcev zvezna in (približno) normalno porazdeljena:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

1. Ocenite, koliko v povprečju tehta slovenski prvošolec.

Iz podatkov:

$$P(X < 25) = 0,15, \quad P(X > 33) = 0,10.$$

Druga enakost pomeni $P(X \leq 33) = 0,90$.

Standardiziramo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Potem

$$P(X < 25) = P\left(Z < \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) = 0,15,$$

$$P(X \leq 33) = P\left(Z \leq \frac{33 - \mu}{\sigma}\right) = 0,90.$$

Označimo kvantile standardne normalne porazdelitve z z_p , tako da $P(Z < z_p) = p$. Iz tabel normalne porazdelitve (ali računalniško) dobimo približne vrednosti

$$z_{0,15} \approx -1,04, \quad z_{0,90} \approx 1,28.$$

Tako dobimo sistem

$$\frac{25 - \mu}{\sigma} \approx -1,04, \quad \frac{33 - \mu}{\sigma} \approx 1,28.$$

Od tod:

$$25 - \mu \approx -1,04 \sigma \implies \mu \approx 25 + 1,04 \sigma,$$

$$33 - \mu \approx 1,28 \sigma \implies \mu \approx 33 - 1,28 \sigma.$$

Izenačimo desni strani:

$$25 + 1,04 \sigma = 33 - 1,28 \sigma \implies (1,04 + 1,28) \sigma = 8 \implies 2,32 \sigma \approx 8.$$

Tako

$$\sigma \approx \frac{8}{2,32} \approx 3,45 \approx 3,5 \text{ kg}.$$

Vstavimo nazaj v $\mu \approx 25 + 1,04 \sigma$:

$$\mu \approx 25 + 1,04 \cdot 3,45 \approx 25 + 3,59 \approx 28,6 \text{ kg}.$$

Torej je

$\mu \approx 28,6 \text{ kg}, \quad \sigma \approx 3,5 \text{ kg}.$

2. Ali je Tina, ki tehta 22 kg, med 5% najlažjih osnovnošolcev?

Tino modeliramo kot realizacijo X . Standardiziramo njeno težo:

$$z_{\text{Tina}} = \frac{22 - \mu}{\sigma} \approx \frac{22 - 28,6}{3,5} = \frac{-6,6}{3,5} \approx -1,89.$$

Poiščemo $P(X \leq 22) = P(Z \leq z_{\text{Tina}})$:

$$P(Z \leq -1,89) \approx 0,03.$$

(iz tabele standardne normale, $z \approx -1,89$ da približno 3%).

Torej približno 3% prvošolcev tehta manj kot Tina. To pomeni, da Tina je med 5% najlažjih osnovnošolcev.

$P(X \leq 22 \text{ kg}) \approx 3\% < 5\%, \text{ torej je Tina med 5\% najlažjih.}$

□

Centralni limitni izrek

Izrek 5.1.9 (Centralni limitni izrek). *Naj bodo $X_1, X_2, \dots, X_n$ enako porazdeljene, neodvisne slučajne spremenljivke z matematičnim upanjem μ in varianco σ^2 . Označimo*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Potem ima v limiti, ko $n \rightarrow \infty$, slučajna spremenljivka

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

standardizirano normalno porazdelitev.

Primer:

Naj bodo $X_1, X_2, \dots, X_n$ neodvisne Bernoullijeve slučajne spremenljivke:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{če je uspeh,} \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

pri čemer je

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p.$$

Takrat je

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Bin}(n, p),$$

torej število uspehov v n poskusih.

Za Bernoullijevo spremenljivko velja

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu = p, \quad \text{Var}(X_i) = \sigma^2 = p(1 - p).$$

Centralni limitni izrek pravi, da za velike n velja približek

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \approx N(0, 1),$$

kjer je $N(0, 1)$ standardna normalna porazdelitev.

Konkretni Primer

Naj bo $n = 100$ in $p = 0,3$. Potem

$$\mathbb{E}[S_{100}] = 100 \cdot 0,3 = 30,$$

$$\text{Var}(S_{100}) = 100 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 21, \quad \sqrt{\text{Var}(S_{100})} = \sqrt{21} \approx 4,583.$$

Želimo približno izračunati verjetnost

$$\mathbb{P}(25 \leq S_{100} \leq 35).$$

Standardiziramo:

$$\mathbb{P}(25 \leq S_{100} \leq 35) = \mathbb{P}\left(\frac{25 - 30}{\sqrt{21}} \leq \frac{S_{100} - 30}{\sqrt{21}} \leq \frac{35 - 30}{\sqrt{21}}\right).$$

Dobimo približno

$$\mathbb{P}(-1,09 \leq Z \leq 1,09),$$

kjer je $Z \sim N(0, 1)$.

Iz tabel standardne normalne porazdelitve dobimo približje vrednosti

$$\mathbb{P}(Z \leq 1,09) \approx 0,862, \quad \mathbb{P}(Z \leq -1,09) \approx 0,138,$$

zato

$$\mathbb{P}(25 \leq S_{100} \leq 35) \approx 0,862 - 0,138 = 0,724.$$

Tako binomsko porazdelitev $\text{Bin}(100, 0,3)$ približamo z normalno porazdelitvijo s parametri

$$N(30, 21) \quad \text{oziroma standardizirano z } N(0, 1).$$

Eksponentna porazdelitev

Za eksponentno porazdelitev s parametrom $\lambda > 0$ velja

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

in $f_X(x) = 0$ za $x < 0$.

Trditev 5.1.10. Če je X eksponentna slučajna spremenljivka s parametrom λ , potem je

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Chapter 6

Funkcije dveh spremenljivk

Funkcije dveh spremenljivk

Ko opazujemo nek pojav, je ta sicer lahko odvisen od ene količine, bolj običajno pa je, da je rezultat odvisen od več količin. Na primer:

- kemijska reakcija je odvisna od temperature in tlaka,
- temperatura v prostoru je odvisna od treh koordinat in časa.

Definicija

Realna funkcija f dveh spremenljivk je preslikava, ki slika iz območja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}$, torej

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Graf funkcije f dveh spremenljivk, definirane na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$ v tridimenzionalnem koordinatnem sistemu, je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

ki predstavlja ploskev v prostoru.

Pri geometrijski predstavi funkcije f dveh spremenljivk, definirane na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$, si lahko pomagamo tudi z izočrtami (*contour lines*). Izočrte funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ so krivulje v D , ki povezujejo tiste točke v D , pri katerih ima funkcija f isto vrednost.

Primer

Naj bo

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Izočrte so koncentrične krožnice.

Zveznost funkcije dveh spremenljivk

Definicija. Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je zvezna v točki $(x_0, y_0) \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

za vsako točko $(x, y) \in D$, za katero velja

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta,$$

to je

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Parcialni odvodi

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkcija dveh spremenljivk. Če je vrednost spremenljivke y fiksna, na primer $y = y_0$, vrednost spremenljivke x pa se spreminja, postane funkcija f funkcija ene spremenljivke x .

Funkcijo ene spremenljivke pa znamo odvajati. Definirajmo odvod funkcije dveh spremenljivk po eni izmed spremenljivk, pri čemer je druga izmed spremenljivk fiksna.

Definicija. Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkcija dveh spremenljivk. Če obstaja limita diferenčnega kvocienta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

potem pravimo, da je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x v točki (x, y) . Parcialni odvod krajše zapišemo tudi kot

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y).$$

Podobno definiramo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki y s predpisom

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Primer. Izračunajmo parcialni odvod funkcije

$$f(x, y) = \log(x + xy + y^2).$$

Diferencial funkcije dveh spremenljivk

Če je f funkcija ene spremenljivke, potem je njen diferencial definiran kot

$$df = f'(x) dx.$$

Geometrijska interpretacija diferenciala je, da graf funkcije aproksimiramo s premico, torej funkcijo aproksimiramo z linearno preslikavo.

Na podoben način definiramo tudi diferencial funkcije dveh spremenljivk. Če je funkcija f diferenciable v točki (a, b) , potem je

$$f(a + h, b + k) \doteq f(a, b) + f_x(a, b) h + f_y(a, b) k.$$

S pomočjo diferenciala lahko graf funkcije dveh spremenljivk aproksimiramo z grafom linearne funkcije, to je ravnino.

Verižna pravila (posredne funkcije)

Oglejmo si pravilo za odvajanje posrednih funkcij, to je verižno pravilo. Naj bo

$$z = z(u, v), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Potem velja

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x, \quad z_y = z_u u_y + z_v v_y.$$

Primer. Naj bo

$$z = u^2 \log v, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = xy.$$

Višji odvodi

Če parcialno odvedljivo funkcijo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, parcialno odvajamo, sta funkciji $f_x, f_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zopet funkciji dveh spremenljivk.

Če sta parcialno odvedljivi, ju lahko ponovno parcialno odvajamo in dobimo parcialne odvode drugega reda:

- $\frac{\partial f_x}{\partial x}(x, y) = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y),$
- $\frac{\partial f_x}{\partial y}(x, y) = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),$
- $\frac{\partial f_y}{\partial x}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),$
- $\frac{\partial f_y}{\partial y}(x, y) = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$

Izrek. Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, dvakrat parcialno odvedljiva funkcija. Če sta funkciji f_{xy} in f_{yx} zvezni, potem velja

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Opomba. V splošnem mešana odvoda funkcije nista enaka.

Hessejeva matrika

Definicija. Matrika drugih parcialnih odvodov funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix},$$

in se imenuje *Hessejeva matrika*.

Opomba. Elementi Hessejeve matrike so funkcije.

Opomba. Če sta druga parcialna odvoda funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, zvezna, potem je Hessejeva matrika funkcije f simetrična.

Ekstrem funkcije dveh spremenljivk

Definicija. Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ima v točki (a, b) ekstrem, če obstaja tako število $\delta > 0$, da ima izraz

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \tag{6.1}$$

isti predznak za vsak h, k , za katera velja $h^2 + k^2 < \delta^2$. Če je izraz (6.1) pozitiven, je v točki (a, b) minimum, če je izraz (6.1) negativen, je v točki (a, b) maksimum.

Kakšnemu pogoju mora zadoščati funkcija, da bo v točki (a, b) ekstrem?

Če fiksiramo eno izmed neodvisnih spremenljivk, na primer $y = b$, potem je funkcija $g(x) = f(x, b)$ funkcija ene spremenljivke; potreben pogoj za nastop ekstrema funkcije g pa je

$$g'(a) = f_x(a, b) = 0.$$

Podobno razmislimo, da mora biti tudi $f_y(a, b) = 0$.

Torej je potreben pogoj za nastop ekstrema funkcije dveh spremenljivk v točki (a, b) pogoj

$$f_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) = 0.$$

Omenjeni pogoj pa ni tudi zadosten pogoj za nastop ekstrema. Lahko sta oba parcialna odvoda v neki točki enaka nič, pa v tej točki ni ekstrema (sedlo).

Točke (x, y) , za katere velja

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0,$$

imenujemo *stacionarne točke* funkcije f .

Izrek. Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ima v stacionarni točki (a, b) ekstrem, če velja

$$\det H(a, b) = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx})(a, b) > 0.$$

V tem primeru je za $f_{xx}(a, b) > 0$ v točki (a, b) minimum, za $f_{xx}(a, b) < 0$ pa maksimum.

Če je

$$\det H(a, b) = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx})(a, b) < 0,$$

v točki (a, b) ni ekstrem (sedlo).

Če je

$$\det H(a, b) = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx})(a, b) = 0,$$

s pomočjo drugih parcialnih odvodov ne moremo ugotoviti, ali je v točki (a, b) ekstrem ali ne.

Definicija. Matrika drugih parcialnih odvodov funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix},$$

in se imenuje *Hessejeva matrika*.

Opomba. Elementi Hessejeve matrike so funkcije.

Opomba. Če sta druga parcialna odvoda funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, zvezna, potem je Hessejeva matrika funkcije f simetrična.

Primer: ekstrem funkcije brez pogojev

Določimo ekstrema funkcije

$$f(x, y) = 2x^2 + y - 2xy - 3x - 3.$$

Najprej poiščemo stacionarne točke. Izračunamo parcialne odvode:

$$f_x(x, y) = 4x - 2y - 3, \quad f_y(x, y) = 1 - 2x.$$

Stacionarne točke dobimo iz sistema

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0 :$$

$$4x - 2y - 3 = 0, \quad 1 - 2x = 0.$$

Iz druge enačbe dobimo $x = \frac{1}{2}$. Vstavimo v prvo:

$$4 \cdot \frac{1}{2} - 2y - 3 = 0 \implies 2 - 2y - 3 = 0 \implies -1 - 2y = 0 \implies y = -\frac{1}{2}.$$

Stacionarna točka je torej $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Za klasifikacijo izračunamo Hessejevo matriko:

$$f_{xx} = 4, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = f_{yx} = -2.$$

Determinanta Hessejeve matrike v stacionarni točki je

$$\det H(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 = 4 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0.$$

Ker je $\det H(a, b) < 0$, v točki $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ni ekstrema, temveč ima funkcija f tam *sedlo*.

Vezani ekstrem

Iščemo ekstrem funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, pri pogoju, da velja

$$g(x, y) = 0.$$

Torej iščemo ekstrem funkcije na neki podmnožici definicijskega območja; ta podmnožica je določena z zvezo $g(x, y) = 0$ med spremenljivkama x in y . Z enačbo $g(x, y) = 0$ je implicitno določena krivulja v $\mathbb{R}^2$.

Oglejmo si Lagrangevo metodo za določanje vezanega ekstrema funkcije f pri pogoju $g(x, y) = 0$.

Definiramo novo funkcijo F treh spremenljivk x, y in λ s predpisom

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Funkcijo F imenujemo *Lagrangeva funkcija*, parameter λ pa *Lagrangev multiplikator*.

Točke, ki so kandidati za vezani ekstrem, poiščemo tako, da poiščemo stacionarne točke funkcije F , torej

$$F_x(x, y, \lambda) = 0, \quad F_y(x, y, \lambda) = 0, \quad F_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Dobimo tri enačbe za tri neznanke, pri čemer je zadnja enačba enaka pogoju

$$g(x, y) = 0.$$

Primer: ekstrem funkcije pri krožnici

Določimo ekstrem funkcije

$$f(x, y) = x + 2y$$

pri pogoju

$$x^2 + y^2 = 5.$$

Definiramo Lagrangevo funkcijo

$$F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Izračunamo parcialne odvode:

$$F_x = 1 + 2\lambda x, \quad F_y = 2 + 2\lambda y, \quad F_\lambda = x^2 + y^2 - 5.$$

Stacionarne točke dobimo iz sistema

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Iz prvih dveh enačb izrazimo λ :

$$\lambda = -\frac{1}{2x}, \quad \lambda = -\frac{1}{y}.$$

Sledi $-\frac{1}{2x} = -\frac{1}{y}$, torej

$$y = 2x.$$

Vstavimo v pogoj:

$$x^2 + (2x)^2 = 5 \implies x^2 + 4x^2 = 5 \implies 5x^2 = 5 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Ker je $y = 2x$, dobimo točki

$$(1, 2) \quad \text{in} \quad (-1, -2).$$

Vrednosti funkcije f :

$$f(1, 2) = 1 + 2 \cdot 2 = 5, \quad f(-1, -2) = -1 + 2 \cdot (-2) = -5.$$

Ker je množica $\{(x, y): x^2 + y^2 = 5\}$ kompaktna in je f zvezna, sta to globalna ekstrema:

$$\max f = 5 \text{ v točki } (1, 2), \quad \min f = -5 \text{ v točki } (-1, -2).$$

Rešitev.

Naj bo

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2.$$

(a) *Stacionarne točke in njihova klasifikacija.*

Stacionarne točke dobimo iz pogoja

$$\nabla f(x, y) = 0.$$

Izračunamo parcialne odvode:

$$f_x(x, y) = 2x + 2, \quad f_y(x, y) = 2y.$$

Stacionarne točke dobimo iz sistema

$$2x + 2 = 0, \quad 2y = 0,$$

torej

$$x = -1, \quad y = 0.$$

Edina stacionarna točka je $(-1, 0)$.

Za klasifikacijo uporabimo Hessejevo matriko:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ker je determinanta pozitivna in $f_{xx} > 0$ ima f v stacionarni točki $(-1, 0)$ *lokalni minimum*.

(b) *Globalni ekstremi na krogu $x^2 + y^2 \leq 4$.*

Funkcija f je polinom, torej zvezna na $\mathbb{R}^2$. Množica $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ je kompaktna (zaprta in omejena), zato f na tem krogu doseže globalni minimum in globalni maksimum.

Najprej opazimo, da lahko funkcijo zapišemo v obliki

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = (x + 1)^2 + y^2 - 1.$$

Iz tega je razvidno, da je globalni minimum v celotni ravnini dosežen v točki $(-1, 0)$, kjer je

$$f(-1, 0) = (-1 + 1)^2 + 0^2 - 1 = -1.$$

Ker ta točka leži v notranjosti kroga $x^2 + y^2 \leq 4$ (saj $(-1)^2 + 0^2 = 1 < 4$), je $(-1, 0)$ tudi globalni minimum na krogu.

Za maksimum preverimo rob kroga, to je krožnica

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Na robu velja

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = (x^2 + y^2) + 2x = 4 + 2x.$$

Na krožnici je torej vrednost funkcije odvisna le od x , in sicer

$$f(x, y) = 4 + 2x, \quad \text{kjer } -2 \leq x \leq 2.$$

- Najmanjša možna vrednost na robu je pri $x = -2$:

$$f(-2, 0) = 4 + 2 \cdot (-2) = 0.$$

- Največja možna vrednost na robu je pri $x = 2$:

$$f(2, 0) = 4 + 2 \cdot 2 = 8.$$

Ker je najmanjša vrednost na robu 0, v notranjosti pa smo našli vrednost -1 , je globalni minimum na krogu enak -1 in je dosežen v točki $(-1, 0)$. Največja vrednost na krogu je 8, dosežena v točki $(2, 0)$.

Sklep:

Edina stacionarna točka je $(-1, 0)$ in je strogi lokalni minimum.

Globalni minimum na krogu: $f_{\min} = -1$ v točki $(-1, 0)$.

Globalni maksimum na krogu: $f_{\max} = 8$ v točki $(2, 0)$.

Dvojni integral

Dvojni integral definiramo podobno, kot smo definirali določen integral, s pomočjo integralских vsot:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{p(D_k) \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) p(D_k).$$

V primeru dvojnega integrala seštevamo prostornine posplošenih valjev.

Dvojni integral izračunamo s pomočjo dvakratnega integrala:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Primer. Naj bo D trikotnik z oglišči $(0, 0)$, $(1, 0)$ in $(1, 1)$, torej

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Izračunajmo dvojni integral

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy.$$

Ker je področje oblike

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

s

$$a = 0, \quad b = 1, \quad g(x) = 0, \quad h(x) = x,$$

lahko pišemo

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^x (x + y) \, dy \right) dx.$$

Najprej izračunamo notranji integral po y :

$$\int_0^x (x + y) \, dy = \int_0^x x \, dy + \int_0^x y \, dy = x[y]_0^x + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x = x \cdot x + \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2.$$

Zato dobimo

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 \, dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Torej je

$$\boxed{\iint_D (x + y) \, dx \, dy = \frac{1}{2}.$$

Funkcijske vrste

Spomnimo se, kaj je to številska vrsta. Dano imamo neko zaporedje realnih števil

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Kaj bi bila vsota neskončno členov tega zaporedja?

Številske vrste

Definicija. Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje realnih števil. Izraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

imenujemo *številska vrsta* (ali na kratko: *vrsta*), število a_n pa imenujemo *splošni člen vrste*.

S pomočjo členov zaporedja $\{a_n\}$ definiramo novo zaporedje $\{s_n\}$ s členi

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad \dots$$

ki jih imenujemo *delne vsote*.

Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

je *konvergentna*, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot $\{s_n\}$. Limito zaporedja delnih vsot imenujemo *vsota vrste*. Če vrsta ni konvergentna, potem pravimo, da je *divergentna*.

Funkcijske vrste

Definicija. Naj bo $\{f_1, f_2, \dots\}$ števna množica realnih funkcij. Potem izraz

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

imenujemo *funkcijska vrsta*.

Za vsak $x_0 \in \mathbb{R}$, ki je v definicijskem območju vseh funkcij f_n , $n \in \mathbb{N}$, je

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

številsko vrsta.

Če za nek x_0 ta številsko vrsta konvergira, potem pravimo, da je funkcijska vrsta *konvergentna* za ta x_0 , oziroma, da je x_0 v *definičijskem območju funkcijske vrste*.

Če za nek x_0 številsko vrsta divergira, potem pravimo, da je za ta x_0 funkcijska vrsta *divergentna*; x_0 ni v definicijskem območju funkcijske vrste.

Množica vseh vrednosti x , za katere je funkcijska vrsta konvergentna, sestavlja definicijsko območje funkcijske vrste.

Primer

Dane so funkcije $f_n(x) = (\sin x)^n$. Zanima nas konvergenca funkcijske vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n = \sin x + (\sin x)^2 + (\sin x)^3 + \dots$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $y = \sin x$, potem vidimo, da za vsako vrednost spremenljivke x dobimo geometrijsko vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = y + y^2 + y^3 + \dots,$$

ki konvergira, če je $|y| < 1$.

Torej mora biti

$$|\sin x| < 1,$$

oziroma

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n = \sin x + (\sin x)^2 + (\sin x)^3 + \dots$$

konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$, razen za

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potenčna vrsta

Definicija. *Potenčna vrsta* je funkcijska vrsta oblike

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

pri čemer je $x_0 \in \mathbb{R}$.

Kaj je s konvergenco potenčne vrste?

S pomočjo kvocientnega kriterija lahko določimo konvergenčno območje potenčnih vrst.

Definicija. Če za potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ obstaja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

potem število

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

imenujemo *konvergenčni polmer* potenčne vrste.

Izrek. Naj bo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

potenčna vrsta in R njen konvergenčni polmer. Potem potenčna vrsta

- za vsak $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ konvergira,
- za vsak $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$ divergira,

Primer

Določimo konvergenčno območje za potenčne vrste:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Taylorjeva vrsta

Naj bo dana realna funkcija f , ki je v okolici točke 0 neskončnokrat odvedljiva. Funkcijo f bi radi v okolici točke 0 aproksimirali s polinomom stopnje n .

Naj bo

$$p_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

tak polinom n -te stopnje, za katerega velja, da se vsi njegovi odvodi v točki 0 ujemajo z odvodi funkcije f v točki 0, torej

$$p_n^{(i)}(0) = f^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Izračunamo:

$$p_n^{(0)}(x) = p_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n,$$

$$p_n^{(1)}(x) = p'_n(x) = a_{n,1} + 2a_{n,2}x + 3a_{n,3}x^2 + \cdots + na_{n,n}x^{n-1},$$

$$p_n^{(2)}(x) = p''_n(x) = 2a_{n,2} + 3 \cdot 2a_{n,3}x + \cdots + n(n-1)a_{n,n}x^{n-2},$$

$\vdots$

$$p_n^{(n)}(x) = n! a_{n,n}.$$

Torej je

$$p_n(0) = a_{n,0} = f(0), \quad p'_n(0) = a_{n,1} = f'(0), \quad p''_n(0) = 2a_{n,2} = f''(0), \quad \dots, \quad p_n^{(n)}(0) = n!a_{n,n} = f^{(n)}(0).$$

Od tod dobimo

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i.$$

Polinom

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i$$

imenujemo *Taylorjev polinom* stopnje n , vrsto

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i$$

pa *Taylorjeva vrsta*.

Če zaporedje polinomov p_n konvergira proti funkciji f , dobimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Doblene rezultate za razvoj funkcije v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 lahko hitro splošimo na rezultate o razvoju v Taylorjevo vrsto okrog katere druge točke:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Taylorjeve vrste nekaterih elementarnih funkcij

1. Eksponentna funkcija $f(x) = e^x$

Funkcijo f razvijemo v Taylorjevo vrsto tako, da izračunamo ustrezne odvode:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Konvergenčni polmer je $R = \infty$, torej vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Opomba. Za vrednost $x = 1$ dobimo

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

2. Sinusna funkcija $f(x) = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Konvergenčni polmer je $R = \infty$, torej vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Opomba. Sinus je liha funkcija, pri razvoju v Taylorjevo vrsto nastopajo samo lihe potence.

Opomba. Za majhne vrednosti x je

$$\sin x \approx x.$$

Na primer:

$$\sin 0,01 \approx 0,00999983.$$

3. Kosinusna funkcija $f(x) = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Konvergenčni polmer je $R = \infty$, torej vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Opomba. Kosinus je soda funkcija, pri razvoju v Taylorjevo vrsto nastopajo samo sode potence.

Opomba. Za majhne vrednosti x je

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Na primer:

$$\cos 0,01 \approx 0,99995000041.$$

Opomba: Eulerjeva formula

Če v razvoju eksponentne funkcije $f(x) = e^x$ v Taylorjevo vrsto namesto x vstavimo ix , dobimo

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Torej je

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right),$$

oziroma

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x = \exp(ix).$$

4. Logaritemska funkcija $f(x) = \log(1+x)$

Ker funkcija $\log x$ v okolici $x = 0$ ni definirana, v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 razvijemo funkcijo $f(x) = \log(1+x)$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Konvergenčni polmer je $R = 1$. Preverimo še krajišča intervala in dobimo, da vrsta konvergira za vsak $x \in (-1, 1]$.

S pomočjo razvoja funkcije $f(x) = \log(1+x)$ v Taylorjevo vrsto lahko izračunamo vrednosti logaritma za vsa realna števila na intervalu $(0, 2]$.

Primer.

$$\log 1,01 \approx 0,00995033, \quad \log 2 \approx 0,69314718.$$

5. Binomska vrsta, funkcija $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Preden bomo lahko zapisali razvoj v Taylorjevo vrsto funkcije $f(x) = (1+x)^m$, $m \in \mathbb{R}$, moramo najprej definirati binomski simbol.

Spomnimo se:

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1, \\ (a+b)^1 &= a+b, \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

(Pascalov trikotnik)

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}.$$

Za $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}.$$

Posplošimo na realne eksponente:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Razvijmo sedaj funkcijo $f(x) = (1+x)^\alpha$ v Taylorjevo vrsto okrog točke 0:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n.$$

Konvergenčni polmer je $R = 1$.

Primer. Razvijmo v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 funkcijo $\sqrt{1+x}$.

Chapter 7

Matrike

7.1 Osnovne definicije

Definicija. Matrika A velikosti $m \times n$ je pravokotna shema števil, sestavljena iz m vrstic in n stolpcev:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Opomba. Števila v matriki so lahko tudi kompleksna; množico vseh kompleksnih matrik velikosti $m \times n$ označimo z $M_{m,n}(\mathbb{C})$ ali na kratko $M_{m,n}$.

Matriko velikosti $m \times 1$ imenujemo *stolpčna matrika* ali *stolpec*, matriko velikosti $1 \times n$ pa *vrstična matrika* ali *vrstica*:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

7.1.1 Posebne oblike matrik

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika ($n \times n$).

Diagonalna matrika. Če velja $a_{ij} = 0$ za vsak $i \neq j$, pravimo, da je

A diagonalna matrika:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Če je $A \in M_n$ diagonalna matrika, ki ima po diagonali same 1 (torej $a_{ij} = 1$, če $i = j$, in $a_{ij} = 0$, če $i \neq j$), jo imenujemo *enotska matrika* ali *identiteta*:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Zgornjetrikotna in spodnjetrikotna matrika. Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika.

Če velja $a_{ij} = 0$ za vsak $i > j$, pravimo, da je A *zgornjetrikotna matrika*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Če velja $a_{ij} = 0$ za vsak $i < j$, pravimo, da je A *spodnjetrikotna matrika*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

7.1.2 Seštevanje in množenje s skalarjem

Na množici matrik iste velikosti lahko definiramo seštevanje in množenje s skalarjem.

Naj bosta $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ in $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$. Potem je

$$A + B := (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

V matrični obliki:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seštevamo torej istoločnicne (istoležne) elemente.

Naj bo $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\lambda A := \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}),$$

tj.

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nevtralni element za seštevaje je ničelna matrika

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

v kateri so vsi elementi enaki 0.

Lastnosti seštevanja matrik:

- $A + B = B + A$ (komutativnost),
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost),
- $A + O = A$ (ničelna matrika je nevtralni element),
- $A + (-A) = O$ (vsaka matrika ima aditivni nasprotni element).

Lastnosti množenja matrik s skalarjem:

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (distributivnost),
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (distributivnost),
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (asociativnost),
- $1 \cdot A = A$ (1 je nevtralni element pri množenju s skalarjem).

7.1.3 Transponirana matrika

Naj bo $A \in M_{m,n}$ matrika. *Transponirana matrika* matrike A je matrika $A^T \in M_{n,m}$, ki jo dobimo tako, da zamenjamo vlogi vrstic in stolpcev:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Velja:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Simetrična in poševno simetrična matrika. Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika.

- Če velja $A = A^T$, pravimo, da je A *simetrična matrika*.
- Če velja $A = -A^T$, pravimo, da je A *poševno simetrična matrika*.

7.1.4 Adjungirana (konjugirano transponirana) matrika, hermitske matrike

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$ kvadratna kompleksna matrika. *Adjungirana matrika* (ali konjugirano transponirana matrika) matrike A je

$$A^* := \overline{A}^T,$$

kjer $\overline{A}$ označuje matriko, v kateri vsak element a_{ij} zamenjamo z njegovim kompleksnim konjugatom $\overline{a_{ij}}$.

- Če velja $A = A^*$, pravimo, da je A *hermitska matrika* (tudi *sebiadjungirana matrika*).

- Če velja $A = -A^*$, pravimo, da je A poševno hermitska matrika.

Trditev. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska matrika, tj. $A = A^*$. Potem so diagonalni elementi realna števila: $a_{ii} \in \mathbb{R}$ za $i = 1, \dots, n$.

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$ poševno hermitska matrika, tj. $A = -A^*$. Potem imajo diagonalni elementi ničelni realni del: $\Re(a_{ii}) = 0$ za $i = 1, \dots, n$.

Dokaz. Zapišimo adjungirano matriko kot $A^* = (\overline{a_{ji}})$.

- Če je A hermitska, torej $A = A^*$, veljajo enakosti elementov:

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad \text{za vse } i, j.$$

Za diagonalno dobimo:

$$a_{ii} = \overline{a_{ii}}.$$

Realno število je natanko takrat enako svojemu kompleksnemu konjugatu, zato je $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

- Če je A poševno hermitska, torej $A = -A^*$, velja

$$a_{ij} = -\overline{a_{ji}} \quad \text{za vse } i, j,$$

in za diagonalno

$$a_{ii} = -\overline{a_{ii}}.$$

To je ekvivalentno

$$a_{ii} + \overline{a_{ii}} = 0.$$

Ker je $a_{ii} + \overline{a_{ii}} = 2\Re(a_{ii})$, dobimo

$$2\Re(a_{ii}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Re(a_{ii}) = 0.$$

S tem sta obe trditvi dokazane. □

Trditev 7.1.1. Za diagonalne elemente hermitske matrike velja, da so realna števila. Torej, če za $A \in M_n(\mathbb{C})$ velja $A = A^*$, potem je $a_{ii} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

Za diagonalne elemente poševno hermitske matrike velja, da so njihovi realni deli enaki nič. Torej, če za $A \in M_n(\mathbb{C})$ velja $A = -A^*$, potem je $\Re(a_{ii}) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Definicija 7.1.2. Naj bo $A \in M_{m,n}$ in $B \in M_{n,r}$. Potem definiramo produkt matrik A in B s predpisom

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1r} + \cdots + a_{1n}b_{nr} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{21}b_{1r} + \cdots + a_{2n}b_{nr} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1r} + \cdots + a_{mn}b_{nr} \end{pmatrix}.$$

Če označimo $C = AB$, torej $(c_{ij}) = (a_{ij})(b_{ij})$, potem je

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Opomba 7.1.3. Element c_{ij} , ki leži v i -ti vrstici in j -tem stolpcu matrike AB , dobimo tako, da izračunamo skalarni produkt i -te vrstice matrike A in j -tega stolpca matrike B .

Opomba 7.1.4. Produkt AB matrik A in B je definiran samo v primeru, ko ima matrika A toliko stolpcev, kot ima matrika B vrstic. Če je torej $A \in M_{m,n}$ in $B \in M_{p,r}$, potem produkt AB obstaja samo, če je $n = p$. Dobljena matrika AB je potem dimenzije $m \times r$ in zato element prostora $M_{m,r}$.

Za množenje matrik veljajo naslednje lastnosti:

- $(AB)C = A(BC)$ (asociativnost),
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributivnost),
- $(B + C)A = BA + CA$ (distributivnost),
- v splošnem $AB \neq BA$ (ne velja komutativnost),
- iz $AB = 0$ ne sledi nujno, da je $A = 0$ ali $B = 0$.

Primer 7.1.5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo A^2 , AB in BA .

Naj bosta $A, B \in M_n$ kvadratni matriki. Potem velja:

- $(AB)^T = B^T A^T$,
- $AI = IA = A$.

Definicija 7.1.6. Naj bo $A \in M_n$. Če obstaja taka matrika $A^{-1} \in M_n$, da velja

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

potem pravimo, da je A obrnljiva ali nesingularna matrika in da je A^{-1} inverzna matrika matrike A .

Opomba 7.1.7. Za dano matriko A njena inverzna matrika ne obstaja nujno. Na primer,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je singularna, torej neobrnljiva. Kdaj je neka matrika nesingularna in kako lahko izračunamo njen inverz, si bomo ogledali kasneje.

Trditev 7.1.8. Za inverz produkta matrik $A, B \in M_n$ velja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Definicija 7.1.9. Naj bo $A \in M_n$. Če velja

$$AA^* = A^*A = I,$$

potem pravimo, da je A unitarna matrika.

Unitarna realna matrika se imenuje ortogonalna matrika.

Opomba 7.1.10. Če je $A \in M_n$ unitarna matrika, potem je A^* inverzna matrika matrike A .

Determinanta

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika. Označimo z $A_{ij} \in M_{n-1}$ kvadratno matriko dimenzije $(n-1) \times (n-1)$, ki jo dobimo tako, da pri matriki A izbrišemo i -to vrstico in j -ti stolpec.

Definicija 7.1.11. Determinanta, označimo jo z $\det$, je preslikava iz prostora M_n kvadratnih matrik dimenzije $n \times n$ v realna števila, torej determinanta kvadratno matriko $A \in M_n$ dimenzije $n \times n$ preslika v realno število $\det A \in \mathbb{R}$.

Determinanto lahko definiramo rekurzivno glede na dimenzijo n prostora M_n s pomočjo razvoja, npr. po prvi vrstici:

- $n = 1$:

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

- $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

- $n = 3$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13} \\ &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

- poljuben n :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Trditev 7.1.12. *Determinanto matrike $A \in M_n$ lahko izračunamo tako, da jo razvijemo po katerikoli vrstici, torej*

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Definicija 7.1.13. Število $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ imenujemo *kofaktor* elementa a_{ij} , ki leži v i -ti vrstici in j -tem stolpcu.

Opomba 7.1.14. Determinanto lahko označimo tudi na naslednji način:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Opomba 7.1.15. Pri izračunu determinante velikosti 3×3 si lahko pomagamo tudi s Sarrusovim pravilom. Prepišemo 2 stolpca in izračunamo 6 produktov “diagonal”. To pravilo velja samo za izračun determinante matrike velikosti 3×3 .

Opomba 7.1.16. Pri določanju pozitivnega in negativnega predznaka si lahko pomagamo s “šahovnico”.

Opomba 7.1.17. Računanje determinante je časovno zelo potratno.

Lastnosti determinante

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika dimenzije $n \times n$.

- Determinanta se ne spremeni, če zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev:

$$\det A = \det A^T.$$

- Če pri kvadratni matriki zamenjamo dve vrstici, se determinanti spremeni predznak. Naj bo $B \in M_n$ matrika, ki jo dobimo tako, da pri matriki A zamenjamo k -to in l -to vrstico, $k \neq l$. Potem je

$$\det B = -\det A.$$

- Če ima matrika A dve enaki vrstici ali dva enaka stolpca, potem je $\det A = 0$.
- Če pri matriki A vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim faktorjem $\lambda \in \mathbb{R}$, potem ima dobljena matrika determinanto, ki je za faktor λ večja od prvotne.
- Če za kvadratno matriko A velja, da je njena k -ta vrstica večkratnik l -te vrstice, potem je $\det A = 0$.
- Če pri kvadratni matriki A katerikoli vrstici prištejemo katerokoli drugo vrstico, potem ima dobljena kvadratna matrika B isto determinanto kot A , torej $\det A = \det B$.
- Naj bo A zgornje trikotna matrika. Potem je njena determinanta enaka produktu njenih diagonalnih elementov:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

- V posebnem primeru, ko je A diagonalna kvadratna matrika, je

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Opomba 7.1.18. Z upoštevanjem navedenih lastnosti lahko matriko preoblikujemo do zgornje trikotne matrike, ki ima enako determinanto kot prvotna matrika, determinanta zgornje trikotne matrike pa je enaka produktu diagonalnih elementov.

Determinanta ima tudi naslednjo pomembno lastnost, ki jo imenujemo multiplikativnost.

Trditev 7.1.19. *Naj bosta $A, B \in M_n$. Potem velja*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Posledica:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Dokaz. Ker je $\det I = 1$, je

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1},$$

torej

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

□

Izrek 7.1.20. *Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika. Potem je A obrnljiva matrika natanko tedaj, ko je*

$$\det A \neq 0.$$

Drugače povedano, matrika $A \in M_n$ je singularna natanko tedaj, ko je

$$\det A = 0.$$

Z izračun determinante matrike dimenzije $n \times n$ je potrebno izračunati $n!$ produktov. Računanje determinante poskušamo poenostaviti z upoštevanjem različnih lastnosti determinante.

Uporaba determinante

Determinanto srečamo pri zelo različnih temah, na primer:

- reševanje sistemov linearnih enačb,
- računanje inverznih matrik,
- preverjanje koplanarnosti vektorjev,
- računanje prostornine,
- računanje vektorskega produkta,
- preverjanje linearne neodvisnosti rešitev diferencialnih enačb,
- iskanje ekstremov funkcij več spremenljivk,
- računanje rotorja vektorskega polja,
- itd.

Rang matrike

Definicija 7.1.21. Rang matrike $A \in M_{m,n}$, ki ga označimo z $\text{rang } A$, je dimenzija največje neničelne poddeterminante te matrike.

Opomba 7.1.22. Torej je $\text{rang } A = k$, če obstaja taka podmatrika A_k dimenzije $k \times k$, za katero je $\det A_k \neq 0$, za vsak $l > k$ pa je $\det A_l = 0$ za vsako podmatriko A_l dimenzije $l \times l$. Matrika ima rang 0, če so vsi njeni elementi enaki nič.

Opomba 7.1.23. Rang je definiran tudi za pravokotne matrike. Velja

$$\text{rang } A \leq \min\{m, n\}.$$

Opomba 7.1.24. Matrika $A \in M_n$ je nesingularna natanko tedaj, ko je $\text{rang } A = n$. Matrika $A \in M_n$ je singularna natanko tedaj, ko je $\text{rang } A < n$.

Ker smo rang matrike definirali s pomočjo determinante, hitro preverimo, da za rang matrike veljajo podobne lastnosti kot za determinanto:

- rang matrike se ne spremeni, če zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev:

$$\text{rang } A = \text{rang } A^T,$$

- če pri matriki zamenjamo dve vrstici, se rang ne spremeni. Naj bo $B \in M_n$ matrika, ki jo dobimo tako, da pri matriki A zamenjamo k -to in l -to vrstico, $k \neq l$. Potem je

$$\text{rang } B = \text{rang } A,$$

- če pri matriki A vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim neničelnim faktorjem $\lambda \in \mathbb{R}$, potem ima dobljena matrika enak rang kot prvotna,
- če pri matriki A katerikoli vrstici prištejemo katerokoli drugo vrstico, potem ima dobljena matrika B enak rang kot A , torej $\text{rang } A = \text{rang } B$,
- naj bo A “zgornje trikotna” matrika. Potem je njen rang enak številu njenih neničelnih vrstic.

Opomba 7.1.25. Z upoštevanjem navedenih lastnosti lahko matriko preoblikujemo do “zgornje trikotne” matrike, ki ima enak rang kot prvotna matrika; rang “zgornje trikotne” matrike pa je enak številu neničelnih vrstic.

Linearna regresija (OLS). Naj imamo podatke (x_i, y_i) za $i = 1, \dots, n$ in linearni model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$

Označimo residuum pri i -tem podatku z

$$r_i(\beta_0, \beta_1) = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i).$$

Metoda najmanjših kvadratov izbere parametra β_0, β_1 tako, da minimizira vsoto kvadratov residuov

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n r_i(\beta_0, \beta_1)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

V matrični obliki zapišemo

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Tedaj je vektor residuov

$$r(\beta) = y - X\beta,$$

in funkcija, ki jo minimiziramo, je

$$\|y - X\beta\|^2 = (y - X\beta)^T (y - X\beta).$$

Izpeljava normalnih enačb z delnimi odvodi (komponentno)

Začnimo s skalarno funkcijo

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

Parcialni odvod po β_0 . Za vsak člen uporabimo pravilo verige:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = 2(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta_0} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i).$$

Ker je

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = -1,$$

dobimo

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = -2(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i).$$

Seštejemo po i :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i).$$

V minimumu mora veljati $\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 0$, zato

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0.$$

To preuredimo v

$$\sum_{i=1}^n y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

torej

$$n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i. \quad (\text{E1})$$

Parcialni odvod po β_1 . Spet uporabimo pravilo verige:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = 2(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta_1} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i).$$

Ker je

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = -x_i,$$

dobimo

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = -2x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i).$$

Seštejemo po i :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i).$$

V minimumu mora veljati $\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0$, zato

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0.$$

Razširimo:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0,$$

torej

$$\beta_0 \sum_{i=1}^n x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (\text{E2})$$

Enačbi (E1) in (E2) sta normalni enačbi v komponentni obliki, v matrični obliki jih zapišemo kot

$$X^T X \hat{\beta} = X^T y.$$

Če je $\text{rang}(X) = 2$, je matrika $X^T X$ obrnljiva in rešitev je enolična:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y.$$

Kdaj pade rang in zakaj tedaj rešitev ni enolična?

Matrika X ima stolpca

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Velja $\text{rang}(X) < 2$ natanko tedaj, ko sta stolpca linearno odvisna, tj. ko obstaja konstanta c , da je

$$(x_1, \dots, x_n)^T = c(1, \dots, 1)^T,$$

kar pomeni

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

V tem primeru naklona β_1 ne moremo enolično določiti, zato rešitev problema najmanjših kvadratov ni enolična.

Chapter 8

Slučajni vektorji

Diskretni slučajni vektor

Definicija 8.0.1. Za gostoto verjetnosti $f_{XY}(x, y)$ slučajnega vektorja diskretnih spremenljivk (X, Y) velja:

- $f_{XY}(x, y) \geq 0$,
- $\sum_x \sum_y f_{XY}(x, y) = 1$,
- $f_{XY}(x, y) = P[X = x, Y = y]$.

Če so možne vrednosti X in Y podane z $\{x_i\}$ in $\{y_k\}$, pogosto pišemo

$$f_{XY}(x_i, y_k) = p_{ik}.$$

Posamezne verjetnosti (marginali)

Definicija 8.0.2. Naj bo $f_{XY}(x, y)$ skupna gostota slučajnega vektorja diskretnih spremenljivk (X, Y) . Potem sta posamezni gostoti (marginali) diskretnih slučajnih spremenljivk X in Y :

$$f_X(x) = P[X = x] = \sum_y f_{XY}(x, y), \quad f_Y(y) = P[Y = y] = \sum_x f_{XY}(x, y).$$

V zapisu p_{ik} (za $x = x_i, y = y_k$) dobimo:

$$p_{i\cdot} = P[X = x_i] = \sum_k p_{ik}, \quad p_{\cdot k} = P[Y = y_k] = \sum_i p_{ik}.$$

Pričakovana vrednost in varianca**Trditev 8.0.3.**

$$E(X) = \mu_X = \sum_x x f_X(x) = \sum_x x \left(\sum_y f_{XY}(x, y) \right) = \sum_x \sum_y x f_{XY}(x, y).$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x) = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)^2 f_{XY}(x, y).$$

Analogno velja za $E(Y)$ in $V(Y)$.

Pogojna gostota

Definicija 8.0.4. Naj bo $f_{XY}(x, y)$ skupna gostota. Pogojna gostota (pogojna porazdelitev) diskretne slučajne spremenljivke Y pri pogoju $X = x$ je

$$f_{Y|x}(y) = P[Y = y \mid X = x] = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}, \quad \text{za } f_X(x) > 0.$$

Neodvisnost

Trditev 8.0.5. Diskretni slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni natanko tedaj, ko velja katerakoli od naslednjih trditev:

- $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ za vse x, y ,
- $f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$ za vse x, y z $f_X(x) > 0$,
- $f_{X|y}(x) = f_X(x)$ za vse x, y z $f_Y(y) > 0$,
- $P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A] P[Y \in B]$ za vse množice A, B .

Opomba 8.0.6. Če množica točk z neničelno verjetnostjo dvorazsežne diskretne slučajne spremenljivke (X, Y) ne tvori pravokotnika, potem X in Y nista neodvisni (pozitivna verjetnost ene spremenljivke omeji zalogo vrednosti druge spremenljivke). Če množica točk z neničelno verjetnostjo tvori pravokotnik, sta X in Y lahko neodvisni, vendar ne nujno (pravokotnik je potreben, ni pa zadosten pogoj za neodvisnost).

Primer 8.0.7 (Skupna porazdelitev, marginali, pogojna verjetnost, (ne)neodvisnost). Naj bo $X \in \{0, 1\}$ in $Y \in \{0, 1\}$ ter

$$p_{00} = 0.20, \quad p_{01} = 0.30, \quad p_{10} = 0.10, \quad p_{11} = 0.40.$$

Marginali:

$$\begin{aligned}f_X(0) &= p_{00} + p_{01} = 0.50, & f_X(1) &= p_{10} + p_{11} = 0.50, \\f_Y(0) &= p_{00} + p_{10} = 0.30, & f_Y(1) &= p_{01} + p_{11} = 0.70.\end{aligned}$$

Pogojna verjetnost:

$$P(Y = 1 \mid X = 0) = \frac{p_{01}}{f_X(0)} = \frac{0.30}{0.50} = 0.60.$$

Ker je $P(Y = 1) = 0.70$, velja $P(Y = 1 \mid X = 0) \neq P(Y = 1)$, zato X in Y **nista neodvisni**. Ekvivalentno: $p_{00} = 0.20 \neq f_X(0)f_Y(0) = 0.50 \cdot 0.30 = 0.15$.

Primer 8.0.8 (Skupna porazdelitev, marginali, pogojna verjetnost, neodvisnost). Naj bo $X \in \{0, 1\}$ in $Y \in \{0, 1\}$ ter

$$p_{00} = 0.21, \quad p_{01} = 0.49, \quad p_{10} = 0.09, \quad p_{11} = 0.21.$$

Marginali:

$$\begin{aligned}f_X(0) &= p_{00} + p_{01} = 0.70, & f_X(1) &= p_{10} + p_{11} = 0.30, \\f_Y(0) &= p_{00} + p_{10} = 0.30, & f_Y(1) &= p_{01} + p_{11} = 0.70.\end{aligned}$$

Pogojna verjetnost:

$$P(Y = 1 \mid X = 0) = \frac{p_{01}}{f_X(0)} = \frac{0.49}{0.70} = 0.70.$$

Ker je $P(Y = 1) = f_Y(1) = 0.70$, velja $P(Y = 1 \mid X = 0) = P(Y = 1)$. Podobno dobimo tudi $P(Y = 1 \mid X = 1) = 0.70$, zato sta X in Y **neodvisni**.

Ekvivalentno: za vse $x, y \in \{0, 1\}$ velja

$$p_{xy} = f_X(x)f_Y(y),$$

npr. $p_{00} = 0.21 = 0.70 \cdot 0.30$ in $p_{11} = 0.21 = 0.30 \cdot 0.70$.

Diskretni slučajni vektor z n komponentami

Definicija 8.0.9. Gostota verjetnosti n -razsežne diskretne slučajne spremenljivke $(X_1, \dots, X_n)$ je

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n].$$

Trditev 8.0.10. Diskretne slučajne spremenljivke $X_1, \dots, X_n$ so neodvisne natanko tedaj, ko velja

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n).$$

Multinomska slučajna spremenljivka

Definicija 8.0.11. Multinomska verjetnostna porazdelitev je posplošitev binomske porazdelitve. Denimo, da n -krat ponovimo poskus:

- rezultat vsakega poskusa pripada enemu izmed k razredov,
- rezultat poskusa je v i -tem razredu z verjetnostjo p_i , $i = 1, \dots, k$,
- poskusi so med seboj neodvisni,
- $p_1 + \dots + p_k = 1$.

Naj X_i označuje število poskusov, ki so v i -tem razredu. Potem velja

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k] = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k},$$

kjer je $x_1 + \dots + x_k = n$.

Primer 8.0.12 (Transport elektronskih naprav). Pri transportu elektronskih naprav so se 4 naprave prevrnile. V preteklosti je imelo 60% prevrnjenih naprav večje poškodbe, 30% manjše poškodbe, 10% pa ni bilo poškodovanih.

- Kolikšna je verjetnost, da imata 2 večje poškodbe in 2 manjše poškodbe?

Naj bo $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.1$, $n = 4$ in $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 0)$:

$$P = \frac{4!}{2! 2! 0!} (0.6)^2 (0.3)^2 (0.1)^0 = 6 \cdot 0.36 \cdot 0.09 = 0.1944.$$

- Kolikšna je verjetnost, da nobena naprava ni poškodovana?

To pomeni $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 4)$, zato

$$P = (0.1)^4 = 0.0001.$$

Slučajni vektorji zveznih spremenljivk

Definicija 8.0.13. Za gostoto verjetnosti $f_{XY}(x, y)$ slučajnega vektorja zveznih spremenljivk (X, Y) velja:

- $f_{XY}(x, y) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$,

- za vsako območje R v ravnini:

$$P[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{XY}(x, y) dx dy.$$

Opomba 8.0.14 (Posamezne gostote in pričakovanja). Posamezni gostoti (marginali) dobimo z integriranjem po drugi spremenljivki:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx.$$

Za poljubno funkcijo g velja

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy,$$

posebej

$$E(X) = \iint x f_{XY}(x, y) dx dy, \quad E(Y) = \iint y f_{XY}(x, y) dx dy, \quad E(XY) = \iint xy f_{XY}(x, y) dx dy.$$

Definicija 8.0.15 (Neodvisnost zveznih slučajnih spremenljivk). Zvezni slučajni spremenljivki X in Y sta *neodvisni*, če za vsaki (Borelovi) množici $A, B \subset \mathbb{R}$ velja

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B).$$

Trditev 8.0.16 (Ekvivalentne karakterizacije). Naj ima par (X, Y) skupno gostoto $f_{XY}(x, y)$ in marginali $f_X(x)$, $f_Y(y)$. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:

- X in Y sta neodvisni.
- Skupna gostota se faktorira:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \text{za vse } x, y.$$

- Pogojna gostota je enaka marginalni (kjer je $f_X(x) > 0$):

$$f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y) \quad \text{za vse } x, y.$$

- Skupna porazdelitvena funkcija se faktorira:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \text{za vse } x, y.$$

Definicija 8.0.17 (Pogojna gostota (zvezni primer)). Naj imata (X, Y) skupno gostoto $f_{XY}(x, y)$ in naj bo marginalna gostota

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy.$$

Če je $f_X(x) > 0$, potem je **pogojna gostota** slučajne spremenljivke Y pri pogoju $X = x$ definirana z

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Pogojna porazdelitvena funkcija je

$$F_{Y|X=x}(y) = P(Y \leq y | X = x) = \int_{-\infty}^y f_{Y|X=x}(t) dt.$$

Primer 8.0.18 (Neodvisnost preko faktorizacije gostote). Naj bosta $X \sim \text{Unif}(0, 1)$ in $Y \sim \text{Unif}(0, 1)$ neodvisni. Tedaj je

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

in marginali sta

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ker velja $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, sta X in Y neodvisni. Na primer,

$$P(X \leq \tfrac{1}{2}, Y \leq \tfrac{1}{3}) = \int_0^{1/2} \int_0^{1/3} 1 dy dx = \frac{1}{6} = P(X \leq \tfrac{1}{2})P(Y \leq \tfrac{1}{3}).$$

Primer 8.0.19 (Odvisnost zaradi podpore, ki ni pravokotnik). Naj bo X enakomerno porazdeljena na $(0, 1)$, pri pogoju $X = x$ pa naj bo Y enakomerno porazdeljena na $(0, x)$. Tedaj je skupna gostota (po Definiciji 8.0.17)

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Preverimo, da je to res gostota: $f_{XY}(x, y) \geq 0$ in

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{x} [y]_0^x dx = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Zato f_{XY} res določa skupno porazdelitev.

Podpora $\{(x, y) : 0 < y < x < 1\}$ je trikotnik (ni pravokotnik), zato X in Y ne moreta biti neodvisni. Na primer,

$$P(Y \leq 0.9 \mid X = 0.2) = 1, \quad P(Y \leq 0.9) = \int_0^1 \int_0^{\min(0.9, x)} \frac{1}{x} dy dx < 1,$$

torej $P(Y \leq 0.9 \mid X = 0.2) \neq P(Y \leq 0.9)$.

Kovarianca in korelacija

Definicija 8.0.20 (Kovarianca). Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki z $E(X) = \mu_X$ in $E(Y) = \mu_Y$. Kovarianca je definirana kot

$$\text{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - \mu_X \mu_Y.$$

Posebej velja $\text{cov}(X, X) = V(X) = \sigma_X^2$.

Definicija 8.0.21 (Korelacija). Če sta $\sigma_X > 0$ in $\sigma_Y > 0$, je *korelacija* definirana kot

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Trditev 8.0.22. Velja

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1.$$

Poleg tega je $\rho_{XY} = 1$ natanko tedaj, ko je $Y = aX + b$, $a > 0$ in $\rho_{XY} = -1$ natanko tedaj, ko je $Y = aX + b$, $a < 0$.

Opomba: neodvisnost $\Rightarrow$ nekoreliranost. Če sta X in Y neodvisni in imata končna pričakovanja, potem

$$E(XY) = E(X)E(Y),$$

zato

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{XY} = 0 \quad (\text{če } \sigma_X, \sigma_Y > 0).$$

Zakaj obrat ne velja? (ideja in mini primer) Ni res, da $\text{cov}(X, Y) = 0$ vedno pomeni neodvisnost. Na primer: naj bo $X \sim \text{Unif}(-1, 1)$ in $Y = X^2$. Tedaj Y ni neodvisna od X (ker Y je določena iz X), vendar:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0 - 0 \cdot E(X^2) = 0,$$

ker je $E(X) = 0$ in zaradi simetrije $E(X^3) = 0$. Torej sta X in Y nekorelirani, a ne neodvisni.

Primer 8.0.23 (Skupna porazdelitev in $Z = 2X + 3Y$). Naj bo $X \in \{0, 1\}$ in $Y \in \{0, 1\}$ ter

$$p_{00} = 0.20, \quad p_{01} = 0.30, \quad p_{10} = 0.10, \quad p_{11} = 0.40.$$

Marginali:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0.20 + 0.30 = 0.50, & P(X = 1) &= 0.10 + 0.40 = 0.50, \\ P(Y = 0) &= 0.20 + 0.10 = 0.30, & P(Y = 1) &= 0.30 + 0.40 = 0.70. \end{aligned}$$

Pričakovana vrednost. Ker je X, Y Bernoullijevi, dobimo

$$E(X) = P(X = 1) = 0.50, \quad E(Y) = P(Y = 1) = 0.70.$$

Definirajmo $Z = 2X + 3Y$. Tedaj

$$E(Z) = E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \cdot 0.50 + 3 \cdot 0.70 = 3.10.$$

Varianca s pomočjo kovariance. Uporabimo formulo

$$\text{Var}(2X + 3Y) = 4 \text{Var}(X) + 9 \text{Var}(Y) + 12 \text{cov}(X, Y).$$

Ker je $X \in \{0, 1\}$, velja

$$\text{Var}(X) = p(1 - p) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25, \quad \text{Var}(Y) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21.$$

Kovarianco izračunamo iz

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Tu je $XY = 1$ natanko takrat, ko sta $X = 1$ in $Y = 1$, zato

$$E(XY) = P(X = 1, Y = 1) = p_{11} = 0.40.$$

Sledi

$$\text{cov}(X, Y) = 0.40 - (0.50)(0.70) = 0.40 - 0.35 = 0.05.$$

Zato

$$\text{Var}(Z) = 4 \cdot 0.25 + 9 \cdot 0.21 + 12 \cdot 0.05 = 1 + 1.89 + 0.60 = 3.49.$$

Sklep: $E(Z) = 3.10$ in $\text{Var}(Z) = 3.49$.

Definicija 8.0.24 (Dvoražsežna normalna porazdelitev). Dvoražsežna normalna porazdelitev ima gostoto

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) = \\ \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho_{XY}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Geometrija korelacije pri dvorazsežni normalni porazdelitvi

Naj bo (X, Y) dvorazsežno normalno porazdeljena s povprečjem

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

in kovariančno matriko

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho \sigma_X \sigma_Y \\ \rho \sigma_X \sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}, \quad -1 < \rho < 1.$$

Po standardizaciji

$$Z_1 = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \quad Z_2 = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y},$$

dobimo $Z = (Z_1, Z_2)^T \sim \mathcal{N}(0, R)$, kjer je korelacijska matrika

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$